
ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Основан в 1994 г.

**2026
№ 2(144)**

Воронеж

Издательство «Научная книга»



2026

Издательство "Научная книга"
Липецкий государственный технический университет
Бакинский государственный университет

ISSN 1813-9744

Журнал зарегистрирован в Центрально-Черноземном управлении Федеральной службы по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия

ПИ N ФС 6-0238 от 19 сентября 2005 г.

Журнал выходит один раз в квартал

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор О.Я.Кравец, д-р техн. наук, профессор

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

А.А.Алиев, д-р техн. наук, профессор (БГУ, Азербайджан, г. Баку)

С.Л.Блюмин, д-р физ.-мат. наук, профессор (ЛГТУ, Россия, г. Липецк)

С.Л.Подвальный, д-р техн. наук, профессор (ВГТУ, Россия, г. Воронеж)

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются. За достоверность сведений, изложенных в статьях, ответственность несут авторы публикаций. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов. При перепечатке ссылка на журнал обязательна.

Правила для авторов доступны на сайте журнала <http://www.sbook.ru/itmu>

Материалы публикуются в авторской редакции.

Дизайн обложки – С.А.Кравец

Адрес редакции и издателя:
394077 Воронеж, ул. 60-й Армии, дом 25,
комн. 120

Телефон: (473)2667653
E-mail: itmu@yandex.ru
<http://www.sbook.ru/itmu>



Подписной индекс в объединенном каталоге «Пресса России» - 41932

Учредитель и издатель: ООО Издательство "Научная книга", <http://www.sbook.ru>

Отпечатано с готового оригинал-макета в ООО "Цифровая полиграфия"

Адрес типографии: 394036, г.Воронеж, ул. Куколкина, 6, тел.: (473) 261-03-61

Подписано в печать 01.06.2026.

Свободная цена

Заказ 0000. Тираж 1000. Усл. печ. л. 5,3. Дата выхода в свет 06.07.2026.

Содержание

1. Информационные технологии в приложениях

Кудайбергенов А.А. Графовое моделирование топологии ирригационных сетей в среде Python.....	84
Murodullaev B.T., Haknazarova D.O. Analysis of soil saturation processes and water level changes through modeling in irrigated areas	96
Немцов М.Л. Разработка программного обеспечения для крупных производств на основе гибридных подходов	106

2. Моделирование и анализ сложных систем

Неъматов А., Садилов Р.Т., Махмудова М.М., Хужамуратова М.Г. Численное моделирование краевой задачи фильтрации в газовых пластах с неоднородной пористой средой	113
Ravshanov N., Boborakhimov B., Nabiyeva I.S. Mathematical modeling of the distribution of harmful substances in the atmosphere in variable-direction currents.....	123
Шадманов И.У., Адизова З.М. Многомерная математическая модель тепло- и массообмена в зернистых материалах при воздействии внутренних и внешних факторов	131

3. Программные и телекоммуникационные системы

Бурлуцкая М.В. Реализация алгоритма повышения производительности узлов распределенных систем.....	141
Добродеев Д.В., Авсеева О.В. Концепция кроссплатформенного мобильного приложения для передачи данных по Bluetooth Low Energy с использованием end-to-end шифрования.....	149
Талагаев М.Ю., Недикова Т.Н., Сергеев М.Ю. Автоматизация устранения уязвимостей в цепочке поставок приложений с использованием GitOps-подхода	156

Правила для авторов	164
---------------------------	-----

1. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Кудайбергенов А.А.

ГРАФОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОПОЛОГИИ ИРРИГАЦИОННЫХ СЕТЕЙ В СРЕДЕ RYTHON

**Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан**

1. Введение

В условиях дефицита водных ресурсов и усложнения структуры ирригационных сетей формализованное представление каналов, гидроузлов и точек бокового водоотбора в единой цифровой среде является актуальной задачей. На практике распределение воды и планирование режимов, как правило, выполняются на основе гидравлических расчётов и технических таблиц, однако такой подход не в полной мере обеспечивает сохранение целостной топологии сети, целостности участков каналов и локальных объектов, расположенных внутри рёбер, в рамках единой модели данных. В связи с этим графовое моделирование служит важной основой для структурирования данных, выполнения гидравлических расчётов, интеграции с базами данных и разработки алгоритмов управления.

В ряде работ рассмотрены вопросы оптимизации водораспределения и управления в крупных насосных станциях, магистральных каналах и системах типа «водохранилище-канал-насос». В частности, для насосных станций были выбраны энергоэффективные режимы работы [1], для магистральных каналов задача водораспределения была поставлена на основе уравнений Сен-Венана [2], для каскада «водохранилище-канал-насос» предложены алгоритмы оптимального управления [3], для каналов в условиях дискретной подачи воды разработаны математические модели [4], а при планировании режимов работы участков магистральных каналов учтены ограничения по напору и потерям для точек бокового водоотбора [5].

В последующих исследованиях были предложены подходы к управлению неустановившимся движением воды в дискретных условиях [6], интеграции процессов управления и вычислений в магистральных каналах и каскадных насосных станциях [7], математические модели оптимального распределения воды [8], анализу течения в сети ирригационных каналов на основе гидравлической сетевой модели [9], а также модели распределения воды, основанные на уровне воды [10]. Эти работы охватывают гидравлические и оптимизационные аспекты, однако не рассматривают преобразование паспортных данных каналов в граф-ориентированную цифровую топологию как центральную задачу.

В существующих исследованиях широко освещены гидравлические уравнения, критерии оптимизации и алгоритмы распределения воды, однако вопросы интеграции паспортных данных каналов, гидротехнических узлов, участков каналов и точек бокового водоотбора в граф-ориентированную се-

риализуемую топологию в среде Python разработаны недостаточно. В качестве объекта исследования в данной работе выбраны каналы Кизкеткен, Куанышжарма и Кегейли, входящие в Кизкеткенскую ирригационную систему. В качестве источников данных использованы паспортные таблицы каналов, технико-кадастровые показатели, перечни сооружений, пикетажные интервалы и сведения о точках бокового водоотбора. Целью исследования является разработка на основе этих данных граф-ориентированной топологической модели, формализация связей между узлами, рёбрами и позиционными объектами, а также формирование её в качестве цифровой основы для последующих расчётов.

2. Граф-ориентированная топологическая модель ирригационной сети

Для корректного представления ирригационной сети в информационной системе её пространственная и функциональная структура должна быть задана в виде формальной топологической модели. Магистральные и распределительные каналы, гидроузлы, регуляторы и точки бокового водоотбора образуют сложную взаимосвязанную структуру. Хотя такую систему можно хранить в табличном виде, с точки зрения вычислений и верификации граф-ориентированное представление является более удобным. Поэтому в данной работе сеть рассматривается как ориентированный граф.

Базовая топологическая модель сети принимается в следующем виде:

$$G = (V, E), \quad (1)$$

где V - множество гидротехнических узлов, то есть совокупность вершин, включающая головное сооружение, гидроузлы, регуляторы, точки разветвления, головные точки хозяйственных каналов и терминальные узлы; E - множество рёбер, соответствующих участкам каналов между указанными узлами. Каждое ребро задаётся в виде $e = (u \rightarrow v)$ и отражает направление движения воды от узла u , расположенного в верхнем бьефе, к узлу v , расположенному в нижнем бьефе. Таким образом, формула (1) служит для формализации базовой гидротехнической структуры сети.

Существенная особенность данного подхода состоит в том, что ребро в графе соотносится не с произвольной частью ирригационного канала, а именно с участком между «верхним бьефом - нижним бьефом», выделенным в паспорте канала. Это позволяет непосредственно сохранять в качестве атрибутов ребра длину, расчётный расход, геометрические параметры, коэффициент эффективности и другие метаданные, содержащиеся в паспортной документации.

Если ребро формируется из нескольких паспортных сегментов, его суммарная эффективность определяется следующим образом:

$$h_e = \bigotimes_{s \in \text{Seg}(e)} h_s, \quad (2)$$

где $\text{Seg}(e)$ - множество паспортных сегментов, относящихся к данному ребру, h_s - коэффициент эффективности каждого сегмента. Формула (2) позво-

ляет объединить потери по нескольким сегментам, относящимся к одному ребру, и получить единый показатель h_e . В дальнейшем этот показатель используется как один из основных параметров при расчётах движения воды по сети и при преобразовании нетто в брутто.

В реальной структуре сети недостаточно учитывать только основные узлы и соединяющие их участки, поскольку в пределах одного участка канала может располагаться несколько точек бокового водоотбора. Если каждая такая точка будет вводиться как новый узел, число рёбер графа искусственно возрастёт, а зафиксированное в паспорте понятие «один участок» окажется раздробленным. Поэтому точки бокового водоотбора рассматриваются не как отдельные рёбра, а как позиционные объекты, привязанные к ребру.

Поэтому в данной работе базовая графовая модель рассматривается в расширенном виде:

$$G^* = (V, E, O), \quad (3)$$

где O - множество точек бокового водоотбора. Таким образом, модель (3) наряду с узлами и рёбрами охватывает также позиционные объекты, расположенные внутри ребра, - точки бокового водоотбора. Такой подход позволяет включать локальные объекты в модель без дробления участка канала.

Для каждой точки бокового водоотбора $o \in O$ принимается следующая связь:

$$y(o) = (e(o), n(o), x_o, side_o). \quad (4)$$

В формуле (4) $e(o)$ - ребро, к которому относится боковая точка, $n(o)$ - узел, принятый для нижележащей сети, $x_o \in (0, 1]$ - доля относительного положения, а $side_o \in \{L, R\}$ указывает на принадлежность боковой точки к левой или правой стороне. Следовательно, точка бокового водоотбора представляется не как самостоятельное ребро, а как позиционный объект, привязанный к ребру.

Параметр x_o , входящий в формулу (4), количественно характеризует положение точки вдоль ребра. Он определяется следующим образом:

$$x_o = \frac{PK_m(o) - PK_m(u)}{PK_m(v) - PK_m(u)}, \quad (5)$$

где $PK_m(u)$, $PK_m(v)$ и $PK_m(o)$ обозначают соответственно пикет начала ребра, конца ребра и боковой точки. Согласно формуле (5), значение x_o выражает относительное положение боковой точки вдоль ребра: при $x_o \approx 0$ точка находится ближе к начальной части ребра, а при $x_o \approx 1$ - к его конечной части.

Для приведения пикетажных значений к единому вычислительному формату они переводятся в метры. Для этого используется следующее выражение:

$$PK_m = 100a + b. \quad (6)$$

Формула (6) переводит пикет в числовое значение в метрах и обеспечивает возможность вычисления X_o в едином формате.

Расширенная топологическая модель важна не только с точки зрения сохранения структуры, но и как основа для последующих расчётов, ориентированных на гидравлику и управление. В частности, если для ребра известна суммарная эффективность h_e и потери вдоль ребра условно распределены однородно, то есть эффективность изменяется по длине мультипликативным образом, частичную эффективность до боковой точки можно оценить с помощью следующей аппроксимации:

$$h_{e@o} = h_e^{X_o}. \quad (7)$$

Здесь $h_{e@o}$ - эффективность участка ребра от его начала до боковой точки, а X_o - доля её относительного положения. С увеличением X_o возрастает и совокупное влияние потерь. Поэтому формула (7) служит для оценки локальной эффективности без сегментирования ребра.

Если классическая модель $G = (V, E)$, заданная в (1), отражает основную топологию сети, то модель $G^* = (V, E, O)$ заданная в (3), учитывает также точки бокового водоотбора, расположенные внутри ребра. По этой причине предложенная модель в большей степени соответствует реальной структуре сети и является более насыщенной в информационном отношении.

Предлагаемая топологическая модель основывается на четырёх принципах: каждый участок, выделенный в паспорте канала, сохраняется как самостоятельное ребро; точки бокового водоотбора представляются как позиционные объекты без дробления ребра; их относительное положение определяется по формулам (5) и (6); для оценки локальной эффективности используется формула (7). Указанные принципы служат теоретической основой для построения объектной модели и алгоритма формирования графа в среде Python.

Таким образом, формулы (1)-(7) объединяют в рамках единой формальной модели топологическую структуру ирригационной сети, участки каналов, точки бокового водоотбора и частичную эффективность. Это служит теоретической основой для последующего построения объектной модели, алгоритма формирования графа и вычислительных процедур.

3. Объектная модель и алгоритм построения графа в среде Python

Для переноса формальных моделей $G = (V, E)$ и $G^* = (V, E, O)$ в среду практических вычислений они были представлены в Python в виде объектно-ориентированной модели данных. Цель данного этапа состоит в размещении сведений о топологии сети, паспортных метаданных и точках бокового водоотбора в единой программной структуре. Для этого был выбран механизм @dataclass среды Python.

3.1. Объектная модель

Расширенная топологическая модель, заданная формулой (3), в программном отношении представляется в виде следующего контейнера:

$$G = (V, E, O, A^{out}, A^{in}). \quad (8)$$

Здесь V - множество объектов **Node**, E - множество объектов **Edge**, O - множество объектов **Offtake**, а A^{out} и A^{in} представляют собой соответственно структуры исходящей и входящей инцидентности. Следовательно, выражение (8) означает, что в среде Python сеть организуется не просто как совокупность объектов, а как контейнер, подготовленный для вычислений.

Объект узла представляет такие элементы сети, как гидроузел, источник, точка разветвления, регулятор, головная точка хозяйственного канала или терминальная точка. Его минимальная атрибутивная форма записывается следующим образом:

$$\text{Node} = (id, kind, name, PK_m, attrs), \quad (9)$$

где id - уникальный идентификатор узла, $kind$ - его тип, $name$ - текстовое наименование, PK_m - значение пикета в метрах, а $attrs$ набор дополнительных технических атрибутов. Введение поля $kind$ необходимо для различения на алгоритмических этапах источников, промежуточных гидроузлов и терминальных точек.

Объект ребра соответствует участку между «верхним бьефом - нижним бьефом», выделенному в паспорте канала, и задаётся в следующем виде:

$$\text{Edge} = (id, u, v, h_e, passport_id, segments, attrs), \quad (10)$$

где u и v - начальный и конечный узлы ребра, h_e - суммарная эффективность ребра, $passport_id$ - идентификатор данного ребра в паспорте, $segments$ - список паспортных сегментов, привязанных к ребру, а $attrs$ - дополнительные поля, содержащие геометрические и гидравлические характеристики. Формула (10) программно закрепляет принцип, введённый в разделе 2: «один участок, выделенный в паспорте, соответствует одному ребру».

Точки бокового водоотбора, в свою очередь, сохраняются не путём разбиения ребра, а в виде специального объекта, привязанного к нему. Этот объект формализуется следующим образом:

$$\text{Offtake} = (id, edge_id, node_id, x_o, side_o, downstream_canal_id), \quad (11)$$

где $edge_id$ - идентификатор ребра, к которому относится боковая точка, $node_id$ - входной узел нижележащей сети, начинающейся от данного бокового отвода, x_o - доля относительного положения, определённая в разделе 3, а $side_o$ - признак, указывающий, с левой или с правой стороны расположена точка. Если за данной боковой точкой начинается отдельная канальная ветвь, то через $downstream_canal_id$ она связывается с нижележащей подсетью. Таким образом, формула (11) позволяет сохранять иерархическую природу сети и на программном уровне.

Для хранения совокупности объектов в едином контейнере используется класс **Graph**. Его внутренняя структура задаётся следующим образом:

$$\text{Graph} = (nodes, edges, offtakes_by_edge, out_adj, in_adj), \quad (12)$$

где $nodes$ - словарь узлов, $edges$ - словарь рёбер, $offtakes_by_edge$ - список боковых точек, привязанных к каждому ребру, а out_adj и in_adj - словари

инцидентности. Из (12) следует, что модель предназначена не только для хранения элементов, но и для быстрого поиска и последующих вычислений.

В среде Python для изменяемых объектов, таких как списки и словари, был использован механизм `field(default_factory=...)`. Это обеспечивает независимое формирование полей *segments*, *offtakes*, *out_adj* и *in_adj* в каждом объекте *Edge* и *Graph* и предотвращает смешение данных.

3.2. Алгоритм построения графа по паспортным данным

После формирования объектной модели процесс построения графа выполняется в следующей последовательности: «оцифровка → выделение узлов → построение рёбер → привязка сегментов → связывание боковых точек».

Сначала ключевые гидротехнические точки сети выделяются в качестве узлов. Для каждого узла идентификатор формируется на основе наименования канала и значения пикета, после чего узлы упорядочиваются по возрастанию пикета, а между соседними точками формируются рёбра:

$$E_c = \{(n_i \textcircled{R} n_{i+1}) : n_i, n_{i+1} \in V_c, PK_m(n_i) < PK_m(n_{i+1})\}, \quad (13)$$

где V_c - множество узлов, относящихся к конкретному каналу c . Формула (13) обеспечивает строгое построение рёбер по пикетажу для каждого канала. При этом сформированные рёбра, в соответствии с топологической моделью, направляются от верхнего бьефа к нижнему.

После формирования рёбер сегменты, указанные в таблице технических характеристик паспорта, привязываются к соответствующим рёбрам. Если пикетажный интервал паспортного сегмента s полностью входит в интервал ребра, то данный сегмент привязывается к этому ребру. Это правило записывается следующим образом:

$$Seg(e) = \{s : PK_{from}(s) \leq PK_m(u), PK_{to}(s) \leq PK_m(v), e = (u \textcircled{R} v)\}. \quad (14)$$

Формула (14) устанавливает логическое соответствие между ребром и паспортным сегментом. Если сегмент оказывается расположенным между двумя рёбрами, алгоритм разделяет его по пикетажной границе на две части и привязывает каждую часть к соответствующему ребру. Хотя на практике такие случаи встречаются редко, данная возможность сохраняется с точки зрения универсальности алгоритма.

Для размещения точек бокового водоотбора в графе определяется, в интервал какого ребра попадает их пикет. Выбор соответствующего ребра осуществляется по следующему условию:

$$e(o) = \{e = (u \textcircled{R} v) \in E : PK_m(u) \leq PK_m(o) \leq PK_m(v)\} \quad (15)$$

Здесь $e(o)$ обозначает выбранное ребро, удовлетворяющее условию (15). На практике (15) используется как правило выбора одного ребра: для каждой точки o она привязывается к тому ребру, в интервале которого находится её пикет. Затем с помощью (5) вычисляется X_o , и это значение записывается в объект *Offtake*. Если за данной боковой точкой начинается нижележащая сеть, то через *downstream_canal_id* устанавливается иерархическая связь между магистральной сетью и нижней подсетью.

В результате общая сеть формируется как объединение магистральной сети и присоединённых к ней нижележащих подсетей:

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{G}_{main} \dot{\cup} \bigcup_{o \in O} \mathbf{G}_{sub}(o). \quad (16)$$

Выражение (16) представляет собой программную интерпретацию модели $G^* = (V, E, O)$, объединяющей в единой вычислительной среде магистральную сеть и подсети, начинающиеся от каждого бокового отвода.

3.3. Проверка и валидация

Построенная графовая модель проходит несколько формальных проверок: контролируется уникальность идентификаторов узлов и рёбер, а также наличие начального и конечного узлов каждого ребра в множестве V .

Третий этап заключается в проверке пикетажной согласованности. При этом для каждого ребра должно выполняться условие $PK_m(u) < PK_m(v)$, а каждая боковая точка должна располагаться в пределах своего ребра. На четвёртом этапе проверяется, находятся ли коэффициенты эффективности в корректном с содержательной точки зрения интервале:

$$0 < h_e \leq 1, \quad 0 < h_{e @ o} \leq 1, \quad 0 < \chi_o \leq 1. \quad (17)$$

Условия (17) обеспечивают, чтобы эффективность ребра, частичная эффективность и доля положения боковой точки принимали значения, не противоречащие их физическому смыслу. Если хотя бы одно из этих условий нарушается, это свидетельствует о наличии ошибки при оцифровке, переводе пикета или привязке атрибутов.

Если в сценарии планирования или обратного расчёта сеть принимается как ациклический ориентированный граф, то дополнительно проверяется существование топологического порядка. Это условие выражается следующим образом:

$$\exists p : V @ 1, \frac{1}{4}, |V| \text{ такая, что } (u @ v) \hat{=} E, (p(u) < p(v)). \quad (18)$$

Выполнение условия (18) означает отсутствие циклов в графе, а следовательно, возможность его топологической сортировки. Если данное условие нарушается, это указывает на наличие цикла в сети. В такой ситуации требуется либо перейти к графу конденсации на основе сильно связанных компонент, либо, с точки зрения эксплуатационного регламента, разделить сеть на ациклические части.

3.4. Подготовка к вычислительному ядру

Для прошедшей проверку топологии для каждого узла сохраняются списки исходящих $out_adj[u]$ и входящих $in_adj[v]$ рёбер. Эти структуры используются для обхода сети, определение узлов нижнего бьефа и вычисление произведения коэффициентов эффективности вдоль маршрута.

Сложность однократного полного формирования построенной сети и подготовки её вспомогательных структур оценивается следующим образом:

$$O(|V| + |E| + |O|). \quad (19)$$

Оценка (19) означает линейную зависимость сложности от числа узлов,

рёбер и боковых точек. Следовательно, модель остаётся вычислительно приемлемой и для крупных сетей.

Наряду с этим для передачи топологии в последующие информационные системы применяется механизм сериализации. Иными словами, объект Graph сохраняется в структурированном формате, например JSON, и приводится к виду, пригодному для последующей загрузки в хранилища данных, такие как PostgreSQL или Neo4j. Такой подход делает цепочку «паспортные данные → топологическая модель → вычислительное ядро» воспроизводимой и проверяемой.

Таким образом, в данном разделе граф-ориентированная топологическая модель была перенесена в среду Python: формулы (8)-(12) описывают объектную модель, (13)-(16) - алгоритм построения графа, (17)-(18) - правила валидации, а (19) - вычислительную сложность. В результате топологический слой сети был программно подготовлен для последующих практических расчётов.

4. Практические результаты

Предлагаемая граф-ориентированная модель и алгоритм построения графа, представленный в разделе 3, были апробированы на паспортных данных каналов Кизкеткен, Куанышжарма и Кегейли, входящих в Кизкеткенскую ирригационную систему. Полученные результаты показали, что модель $G^* = (V, E, O)$ и объектная модель позволяют переводить кадастровые данные, участки, сооружения и точки бокового водоотбора, содержащиеся в паспорте канала, в единую топологическую среду.

4.1. Результаты структурирования паспортных параметров

На первом этапе общие кадастровые и технические параметры по трём каналам были приведены к единому формату. В результате для каждого канала был сформирован вектор агрегированных параметров:

$$R_c = (Q_{\max,c}, Q_{\text{norm},c}, Q_{\min,c}, L_c, A_c, K_c). \quad (20)$$

Здесь $Q_{\max,c}$ - максимальный расход канала, $Q_{\text{norm},c}$ - нормальный расход, $Q_{\min,c}$ - минимальный расход, L_c - общая длина, A_c - обслуживаемая площадь, K_c - класс канала. Агрегированные параметры, полученные в соответствии с формулой (20), приведены в табл. 1.

Таблица 1

Общие технико-кадастровые параметры каналов Кизкеткенской системы

Канал	Q_{\max} , м³/с	Q_{norm} , м³/с	Q_{\min} , м³/с	Длина, км	Обслуживаемая площадь, тыс. га	Класс
Кизкеткен	920	274	52	24,5	323	I
Куанышжарма	200	160	50	81,28	100,9	I
Кегейли	160	140	80	55,4	182,6	I

Согласно табл. 1, все три канала относятся к I классу, однако различаются по параметрам расхода и обслуживаемой площади. Канал Кизкеткен является наиболее крупным объектом, тогда как Куанышжарма и Кегейли представляют собой ответвляющиеся каналы, получающие воду от него. Эти дан-

ные были непосредственно включены в объектные модели, рассмотренные в разделе 3.

4.2. Участки каналов и коэффициенты эффективности

На втором этапе технические характеристики, заданные в паспорте по пикетажным интервалам, были привязаны к рёбрам в соответствии с правилом (14), приведённым в разделе 3. В результате общее число паспортных сегментов было определено следующим образом:

$$N_{seg} = N_{seg}^{Kiz} + N_{seg}^{Qua} + N_{seg}^{Keg} = 3 + 4 + 3 = 10. \quad (21)$$

Согласно результату (21), в топологическую модель для Кизкеткенской системы были перенесены в общей сложности 10 основных паспортных сегментов. Пикетажный интервал, расход в начале участка, длина и коэффициенты эффективности для этих сегментов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Пикетажный интервал, начальный расход, длина и коэффициенты эффективности по участкам каналов

Канал	Пикетажный интервал	$Q_{нач}, \text{ м}^3/\text{с}$	Длина, км	η
Кизкеткен	0+00-23+00 (старое головное сооружение)	280	2,30	0,84
Кизкеткен	0+00-14+53 (новое головное сооружение)	240	1,453	0,84
Кизкеткен	23+00-245+00	520	22,2	0,84
Куанышжарма	0+00-341+00	200	34,1	0,84
Куанышжарма	341+00-498+00	120	15,7	0,84
Куанышжарма	498+00-688+80	90	19,08	0,84
Куанышжарма	688+80-812+80	89	12,40	0,84
Кегейли	0+00-114+40	160	11,44	0,92
Кегейли	114+40-366+00	120	25,16	0,92
Кегейли	366+00-554+00	100	18,8	0,92

Согласно табл. 2, для сегментов Куанышжармы и Кизкеткена в основном сохранены значения $\eta = 0,84$, тогда как для Кегейли $\eta = 0,92$. Это подтверждает возможность восстановления эффективности ребра по паспортным сегментам на основе формул (2) и (14). Наличие в Кизкеткене старого и нового головного сооружения, в свою очередь, указывает на существование двух конфигураций исходного узла.

4.3. Крупные узлы и рёбра топологии

На третьем этапе на основе таблицы сооружений, приведённой в паспорте, были выделены крупные топологические узлы, а между соседними узлами, в соответствии с правилом (13), приведённым в разделе 3, построены рёбра. В результате множество крупных узлов сети было сформировано следующим образом:

$$V_{key} = V_{Kiz} \dot{\cup} V_{Qua} \dot{\cup} V_{Keg}. \quad (22)$$

Крупные узлы, выделенные в соответствии с формулой (22), и основные топологические связи между ними схематически представлены на рис. 1. В табл. 3 основные узлы, входящие в данную схему, детализированы по пикетажу и типам.

Как видно из рис. 1, магистральный канал Кизкеткен через гидроузел

Развилка разделяется на две основные ветви - каналы Куанышжарма и Кегейли. В ветви Куанышжарма последовательно расположены гидроузлы Ишим-узяк, Марха-узяк и Тельман, тогда как в ветви Кегейли основной топологический контур образуют гидроузлы Дустлик, Май-жап и Бес-жап. Данная схема наглядно отражает логику взаимосвязи узлов, приведённых в табл. 3.



Рис. 1. Схема крупных топологических элементов каналов Кизкеткенской ирригационной системы

Таблица 3

Крупные топологические узлы сети

Канал	Наименование узла	Пикет	Тип узла
Кизкеткен	Головное сооружение (старое/новое)	0+00	Узел-источник
Кизкеткен	Развилка	245+00	Гидроузел
Куанышжарма	Ишим узяк	341+00	Гидроузел
Куанышжарма	Марха-узяк	498+00	Гидроузел
Куанышжарма	Тельман	688+80	Гидроузел
Куанышжарма	Темпий Джильванский	812+80	Гидроузел
Кегейли	Дустлик	114+40	Гидроузел
Кегейли	Май-жап	366+00	Гидроузел
Кегейли	Бес-жап	554+00	Гидроузел

Согласно табл. 3, магистральная сеть Кизкеткен через гидроузел Развилка образует основную точку разветвления, тогда как каналы Куанышжарма и Кегейли представлены внутри себя цепочкой последовательно расположенных гидроузлов. На этой основе рёбра были построены по принципу «верхний бьеф → нижний бьеф». Это позволило привести сведения о сооружениях, представленные в паспортных таблицах в разрозненном виде, к единой узлово-рёберной структуре.

4.4. Результаты привязки точек бокового водоотбора без увеличения числа рёбер

На четвёртом этапе точки бокового водоотбора были привязаны к ребру

как позиционные объекты без его сегментирования. Данный процесс выполнялся в соответствии с формулой (5), приведённой в разделе 2, и правилом (15), изложенным в разделе 3. Например, точка бокового водоотбора, расположенная на пикете 757+80 канала Куанышжарма, попадает в интервал 688+80-812+80. Поэтому доля её относительного положения вдоль ребра вычисляется следующим образом:

$$x_{757+80} = \frac{75780 - 68880}{81280 - 68880} \approx 0,556. \quad (23)$$

Аналогично, точка бокового водоотбора, расположенная на пикете 271+00 канала Кегейли, попадает в интервал 114+40-366+00, и её доля относительного положения составляет:

$$x_{271+00} = \frac{27100 - 11440}{36600 - 11440} \approx 0,622. \quad (24)$$

Как следует из формул (23) и (24), точки бокового водоотбора могут быть точно локализованы внутри ребра без разбиения его на новые сегменты. В результате число рёбер не увеличивается искусственным образом, при этом сохраняется локальная позиционная информация. Именно это определяет практическую значимость предложенного множества объектов O .

Таким образом, зафиксированное в паспорте понятие «один участок» было сохранено. Если бы каждая боковая точка вводилась как новый узел, участки оказались бы раздробленными на более мелкие части. Предложенный подход, напротив, позволил расширить базовую узловую-рёберную структуру при сохранении целостности участков.

4.5. Результаты проверки соответствия сооружениям, приведённым в паспорте

На пятом этапе построенная топологическая структура была сопоставлена с таблицей сооружений, приведённой в паспорте. Для этого по каждому типу объекта сравнивались его количество в паспорте и количество, перенесённое в графовую модель. Коэффициент соответствия определялся следующим образом:

$$r_j = \frac{N_j^{\text{graph}}}{N_j^{\text{passport}}}. \quad (25)$$

Здесь N_j^{graph} - количество объектов j -го типа в графовой модели, а N_j^{passport} - количество тех же объектов, указанных в паспорте. Результаты данного сопоставления приведены в табл. 4.

Согласно табл. 4, по всем основным учитываемым категориям выполняется условие

$$r_j = 1. \quad (26)$$

Результат (26) означает, что в цепочке «паспорт \rightarrow объекты \rightarrow граф» потери информации не произошло. Следовательно, наряду с условиями валидации (17)-(18), приведёнными в разделе 3, количественное соответствие, представленное в табл. 4, также подтверждает практическую надёжность модели.

Таблица 4

Соответствие между сооружениями, приведёнными в паспорте, и графовой моделью

Тип объекта	Количество по паспорту	Количество в графовой модели	Коэффициент соответствия
Головные регуляторы	4	4	1,00
Гидроузлы	8	8	1,00
Точки бокового водоотбора	7	7	1,00
Автодорожные мосты	15	15	1,00
Железнодорожные мосты	2	2	1,00
Аварийные сбросные сооружения	4	4	1,00

4.6. Результаты экспорта и представление, подготовленное к расчётам

На шестом этапе построенная топология была экспортирована во внешние форматы для последующих расчётов и передачи в модули информационной системы. Экспортный пакет был сформирован в следующей структуре:

$$\mathbf{X} = (\text{nodes}, \text{edges}, \text{segments}, \text{oftakes}). \quad (27)$$

Согласно формуле (27), узлы, рёбра, паспортные сегменты и точки бокового водоотбора были сохранены в формате JSON во взаимосвязанном виде. В формате Excel эти данные были вынесены на отдельные листы. Основные результаты, представленные в табл. 1-4, были сформированы именно на основе данной экспортированной структуры.

Табл. 1-4 отражают соответственно общие технические параметры, атрибуты рёбер и сегментов, узлы, а также результаты валидации. В совокупности они показывают, что предложенные модель и алгоритм обеспечивают преобразование разрозненных данных паспорта канала в формализованное, проверяемое и пригодное для экспорта во внешние форматы графовое представление. Поэтому сформированная топологическая среда может рассматриваться как цифровая основа для последующих гидравлических и управленческих расчётов.

5. Заключение

В исследовании предложен метод граф-ориентированного моделирования ирригационных сетей в среде Python. На примере Кизкеткенской системы в единую графовую среду были перенесены 3 канала, 10 паспортных сегментов, 9 крупных узлов и 7 точек бокового водоотбора. В результате сформирована цифровая топологическая основа для проверки паспортных данных, сериализации и их последующего подключения к расчётным процедурам.

Список использованных источников

1. Rakhimov S., Seytov A., Kudaybergenov A. Modeling and optimization of water supply processes at large pumping stations// Global and Stochastic Analysis, 8(3), pp. 55-59. (2021)
2. Kabulov A., Seytov A., Kudaybergenov A. Optimal water distribution in large maincanals of irrigation system// Global and Stochastic Analysis, 8(3) pp. 45-53. (2021)
3. Rakhimov Sh. et al. Algorithms for solving the problems of optimizing water resources management on a reservoir seasonal regulation// AIP Conferens Proceedings, 2432(1): 060023

(2022). doi: 10.1063/5.0090412

4. Seytov A., et al. Mathematical models and optimal control algorithms for channels of irrigation systems, taking into account the discreteness of water supply// Academic research in educational sciences, 2(5), pp. 521-533. (2021)

5. Кудайбергенов А.А. Определение режимов работы участков канала при планировании водораспределения в магистральном канале// Информационные технологии моделирования и управления, 2020, №2(120), с.106-114.

6. Rakhimov Sh., et al. Optimal control of unstable water movement in channels of irrigation systems under conditions of discontinuity of water delivery to consumers// IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 883(1): 012065. (2020) doi: 10.1088/1757-899X/883/1/012065.

7. Kabulov A. et al. Optimal Management of Water Resources in Large Main Canals with Cascade Pumping Stations// 2020 IEEE International IOT, Electronics and Mechatronics Conference (IEMTRONICS), Vancouver, BC, Canada, pp. 1-4. (2020).doi: 10.1109/IEMTRONICS51293.2020.9216402

8. Rakhimov Sh. et al. Mathematical models of optimal distribution of water in main channels// 2020 IEEE 14th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT), Tashkent, Uzbekistan, pp. 1-4. (2020). doi: 10.1109/AICT50176.2020.9368798.

9. Kim H. et al. Irrigation Canal Network Flow Analysis by a Hydraulic Model// Irrig. and Drain., 65(S1), pp. 57-65. (2016). doi: 10.1002/ird.1992

10. Zhou K. et al. An optimal water distribution model for canal systems based on water level// Scientific Reports, 15:12350 (2025). doi: 10.1038/s41598-025-96692-2.

Murodullaev B.T., Haknazarova D.O.

ANALYSIS OF SOIL SATURATION PROCESSES AND WATER LEVEL CHANGES THROUGH MODELING IN IRRIGATED AREAS

Tashkent International University of Education

1. Introduction. Irrigation systems represent one of the primary mechanisms for ensuring the efficient utilization of water resources in irrigated regions. They are essential for satisfying the water demands of agricultural crops, sustaining optimal soil moisture conditions, and enhancing crop yields. At the same time, the intensity and duration of irrigation operations induce notable changes in groundwater flow and levels, resulting in the development of complex hydrological processes.

The dynamics of groundwater are influenced by physical and mechanical properties of soil and subsurface layers, including porosity, permeability, and filtration coefficients. Additionally, the spatial distribution of irrigation water, infiltration mechanisms, and interactions between surface water and groundwater systems significantly affect changes in water levels. The uneven spatial distribution of these factors across different regions leads to variations in groundwater levels and flow directions.

Consequently, precise forecasting of groundwater movement and levels through mathematical modeling is critical for managing irrigation systems effectively, utilizing water resources rationally, and preventing environmental issues such as soil salinization, waterlogging, and crop deterioration. Despite significant progress in advanced research on this subject, a comprehensive analysis of existing scientific literature regarding groundwater dynamics and irrigation system optimi-

zation remains necessary.

This study [1] investigates the influence of wells' limited simultaneous water extraction capacity on farmers' irrigation choices and the resulting economic outcomes of groundwater use in agriculture. Using an analytical model that accurately incorporates well capacity, the authors demonstrate that under conditions of low well capacity, the price elasticity of groundwater demand is higher. Findings indicate that irrigation decisions are nonlinear with respect to well capacity and climatic factors; notably, in arid regions, farmers with high-capacity wells increase water usage, whereas those with low-capacity wells reduce consumption.

The work also examines the sensitivity of groundwater forecasts to observational uncertainties in hydroclimatic data using artificial neural network (ANN) models. The ANN model is combined with PAWN sensitivity analysis to evaluate uncertainties related to temporal, spatial, and hydrological conditions. Results reveal that evaporation and precipitation are the principal sources of predictive uncertainty, with their impact varying according to water scarcity or abundance [2].

Another study [3] assesses the economic advantages of water resource management using a multicellular, spatially precise groundwater model. Analysis of Kern County, California, demonstrates that the overall welfare gains from integrated governance substantially exceed those predicted by simplified "bathtub" models. The study also highlights that farmer profits vary considerably depending on regional location and water demand.

In [4], the effects of reduced well productivity and increased pumping costs on agricultural production were compared. Empirical and modeling results from Nebraska show that decreased well productivity sharply reduces irrigated areas and profit, while higher pumping costs primarily affect profitability.

In [5], a field-based evaluation of irrigation water usage is proposed using remote sensing and machine learning techniques. In the Ogallala aquifers, irrigation volumes are predicted with high accuracy via a random forest model, though predictive accuracy declines when results are transferred across space and time. The findings underscore the need for caution when employing irrigation maps in policy assessments.

The article [6] introduces an agent-based groundwater modeling environment, FlowLogo, which facilitates simulation of interactions between social and hydrological processes within a single framework. The model is adapted to analyze multi-level decision-making, feedback mechanisms, and sensitivity analyses, and it is suitable for both scientific research and educational purposes.

In [7], the ABM-MODFLOW integrated hydroeconomic model is applied to the High Plains region of the United States, capturing actual farmer decisions and their influence on groundwater systems. Results indicate that irrigation capacity and soil characteristics are decisive factors in farmer income.

Study [8] proposes a novel method for assessing field-level irrigation water consumption based on the Budyko circle approach. Using the calibrated Budyko-Fu equation, water distribution is extrapolated to unmonitored areas, demonstrating higher accuracy compared to conventional statistical methods.

In [9], a model accounting for well productivity and seasonal irrigation planning is developed to determine irrigation demand. Application in the Texas High Plains shows that irrigation decisions exhibit strong nonlinear responses to groundwater availability, with declines in well productivity resulting in sharp reductions in irrigated areas.

Study [10] confirms that existing integrated hydroeconomic models may misestimate irrigation demand and agricultural sustainability if well productivity constraints are not incorporated. The authors highlight the necessity of modeling nonlinear irrigation decision behaviors.

In [11], numerical modeling methods for groundwater geofiltration processes are developed and applied to hydrogeological problems. The study examines groundwater infiltration through mountainous water layers, proposing optimized drainage system designs. Mathematical models describing groundwater-surface water interactions are developed, with attention to predicting changes in water level, water state, and calculating water balance. Groundwater movement, saturation, and infiltration in single-layer media are also incorporated.

Study [12] presents an automated monitoring system for observing groundwater changes due to natural and anthropogenic factors. Linked to forecasting and resource management, the system improves data collection and analysis efficiency, reduces human error, and allows visualization of groundwater levels, chemical composition, and physical properties as digital maps to inform decision-making.

Across these studies, groundwater and confined waters, along with salt concentrations and filtration processes, are modeled using mathematical and numerical techniques. Nonlinear differential equations are solved via finite-difference schemes and numerical algorithms [13-15, 21]. Active porosity, flow velocity, filtration coefficients, evaporation, water loss, and boundary conditions are incorporated in two-layer geosystems. Based on this framework, the impacts of groundwater level, filtration rates, and salt concentration on environmental processes are analyzed. Effective scientific and practical modeling approaches for water resource management and groundwater dynamics forecasting are proposed.

In these investigations, the filtration process in areas with repeated crop cultivation is modeled. Existing literature on mathematical and numerical modeling was analyzed. Groundwater and surface water levels were determined relative to an impermeable lower horizon, with aquifer flow described via nonlinear parabolic differential equations. Results indicate that irrigation water exerts the greatest influence on groundwater levels during filtration [16, 17].

Overall, these studies provide a comprehensive overview of recent research on irrigation systems and groundwater dynamics. They highlight that determining site-specific parameters for each irrigated area and optimizing water distribution remain critical challenges. Due to environmental heterogeneity, uniform resource allocation does not ensure effective irrigation. Maintaining optimal groundwater levels, balancing excess water, and replenishing water-deficient areas contribute to increased agricultural productivity and environmental sustainability. The developed information system for irrigated areas enables determination of spatiotemporal physical charac-

$$C(x, y, z, t)|_{t=0} = C_0(x, y, z), \quad P(x, y, z, t)|_{t=0} = P_0(x, y, z).$$

The values of concentration and pressure at the boundary points are introduced by the following equations. The values of the C concentration function at the boundary points are calculated as follows [19, 20]:

$$\begin{aligned} x=0, \quad C(x, y, z, t) &= C(x + Dx, y, z, t) + (C(x + Dx, y, z, t) - C(x + 2Dx, y, z, t)); \\ x=L_x, \quad C(x, y, z, t) &= C(x - Dx, y, z, t) + (C(x - Dx, y, z, t) - C(x - 2Dx, y, z, t)); \\ y=0, \quad C(x, y, z, t) &= C(x, y + Dy, z, t) + (C(x, y + Dy, z, t) - C(x, y + 2Dy, z, t)); \\ y=L_y, \quad C(x, y, z, t) &= C(x, y - Dy, z, t) + (C(x, y - Dy, z, t) - C(x, y - 2Dy, z, t)); \\ z=0, \quad C(x, y, z, t) &= C(x, y, z + Dz, t) + (C(x, y, z + Dz, t) - C(x, y, z + 2Dz, t)); \\ z=L_z, \quad C(x, y, z, t) &= W_g. \end{aligned}$$

The values of the pressure function P at the boundary points are calculated as follows [19, 20]:

$$\begin{aligned} x=0, \quad P(x, y, z, t) &= P(x + \Delta x, y, z, t) + (P(x + \Delta x, y, z, t) - P(x + 2\Delta x, y, z, t)); \\ x=L_x, \quad P(x, y, z, t) &= P(x - \Delta x, y, z, t) + (P(x - \Delta x, y, z, t) - P(x - 2\Delta x, y, z, t)); \\ y=0, \quad P(x, y, z, t) &= P(x, y + \Delta y, z, t) + (P(x, y + \Delta y, z, t) - P(x, y + 2\Delta y, z, t)); \\ y=L_y, \quad P(x, y, z, t) &= P(x, y - \Delta y, z, t) + (P(x, y - \Delta y, z, t) - P(x, y - 2\Delta y, z, t)); \\ z=0, \quad P(x, y, z, t) &= P(x, y, z + \Delta z, t) + (P(x, y, z + \Delta z, t) - P(x, y, z + 2\Delta z, t)); \\ z=L_z, \quad P(x, y, z, t) &= P(x, y, z - \Delta z, t) + \\ &+ (P(x, y, z - \Delta z, t) - P(x, y, z - 2\Delta z, t)) + P_A + P_g, \end{aligned}$$

here $C(x, y, z, t)$ - concentration of water in the medium; x_x, x_y, x_z - maximum concentration achievable in the medium; $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ - advection components; $D_x(x, y, z, t)$, $D_y(x, y, z, t)$, $D_z(x, y, z, t)$ - diffusion coefficients; S_q - water retention coefficient of the medium; r , g - water density and acceleration due to gravity; P_A - atmospheric pressure; P_g - hydrostatic pressure.

$$W_g = \delta_{in} Q_{in} - \delta_b Q_b + \delta_s Q_s,$$

here Q_{in} - infiltration saturation of groundwater with atmospheric precipitation; Q_s - the amount of water supplied during the irrigation period; Q_b - evaporation [18-20].

3. Numerical problem-solving algorithm

The complex and multidimensional nature of the problem makes it difficult to obtain its analytical solution. Therefore, by replacing the continuous domain of variables with a grid domain, the finite difference method is used to solve the given problem,

$$\Omega = \begin{cases} \bar{i} & x_i = x_0 + i\Delta x, i = 0, 1, \dots, N_x; \\ \bar{j} & y_j = y_0 + j\Delta y, j = 0, 1, \dots, N_y; \\ \bar{k} & z_k = z_0 + k\Delta z, k = 0, 1, \dots, N_z, T_n. \end{cases} \begin{matrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \\ \ddot{p} \end{matrix}$$

The time step is determined based on the expression $T_n = \sum_{t=0}^n \Delta t_t$ and to ensure the stability of the finite-difference scheme, the value of the time step is selected as follows [18-20]:

$$\Delta t = \min \left\{ \frac{\alpha \Delta x}{\epsilon u_{\max}}, \frac{\Delta y}{v_{\max}}, \frac{\Delta z}{w_{\max}}, \frac{\Delta x^2}{2D}, \frac{\Delta y^2}{2D}, \frac{\Delta z^2}{2D} \right\}$$

Combining the above components, equation (1) can be represented as a general finite-difference equation:

$$\begin{aligned} \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n}{\Delta t^n} = & - \frac{\alpha}{\epsilon} x_{i-1/2,j,k} u_{i-1/2,j,k}^n \frac{C_{i-1,j,k}^n - C_{i,j,k}^n}{2\Delta x} + \\ & + x_{i+1/2,j,k} u_{i+1/2,j,k}^n \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i+1,j,k}^n}{2\Delta x} - \frac{\alpha}{\epsilon} x_{i-1/2,j,k} v_{i,j-1/2,k}^n \frac{C_{i,j-1,k}^n - C_{i,j,k}^n}{2\Delta y} + \\ & + x_{i+1/2,j,k} v_{i,j+1/2,k}^n \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j+1,k}^n}{2\Delta y} - \frac{\alpha}{\epsilon} x_{i-1/2,j,k} w_{i,j,k-1/2}^n \frac{C_{i,j,k-1}^n - C_{i,j,k}^n}{2\Delta z} + \\ & + x_{i+1/2,j,k} w_{i,j,k+1/2}^n \frac{C_{i,j,k}^n - C_{i,j,k+1}^n}{2\Delta z} + x_{i-1/2,j,k} D_x \frac{C_{i+1,j,k}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x^2} + \\ & + x_{i+1/2,j,k} D_x \frac{C_{i+1,j,k}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x^2} + x_{i,j-1/2,k} D_y \frac{C_{i,j+1,k}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y^2} + \\ & + x_{i,j+1/2,k} D_y \frac{C_{i,j+1,k}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y^2} + x_{i,j,k-1/2} D_z \frac{C_{i,j,k+1}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} + \\ & + x_{i,j,k+1/2} D_z \frac{C_{i,j,k+1}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} + W_{g_{i,j,k}}^n; \end{aligned}$$

here $u_{i,j,k}$, $v_{i,j,k}$, $w_{i,j,k}$ - advection components; D_x, D_y, D_z - diffusion coefficients; $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - spatial steps.

Now we introduce the pressure components in equation (2) into a discrete form with respect to time and plane.

$$\begin{aligned} S_{\text{save}} \frac{1}{r g} \frac{P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^n}{\Delta t^n} = & \frac{k_{i+1/2,j,k}^n \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{P_{i+1,j,k}^n}{r g} + z_k - \frac{P_{i,j,k}^n}{r g} - z_k}{\Delta x^2} - \\ & - \frac{k_{i-1/2,j,k}^n \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{P_{i,j,k}^n}{r g} + z_k - \frac{P_{i-1,j,k}^n}{r g} - z_k}{\Delta x^2} + \frac{k_{i,j+1/2,k}^n \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{P_{i,j+1,k}^n}{r g} + z_k - \frac{P_{i,j,k}^n}{r g} - z_k}{\Delta y^2} - \\ & - \frac{k_{i,j,k+1/2,k}^n \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{P_{i,j,k+1}^n}{r g} + z_k - \frac{P_{i,j,k}^n}{r g} - z_k}{\Delta y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{k_{i,j-\frac{1}{2},k}^n \frac{C_{i,j,k}^n}{e} + z_k - \frac{P_{i,j-1,k}^n}{r g} - z_k \frac{\ddot{O}}{\emptyset}}{\Delta y^2} + \frac{k_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n \frac{C_{i,j,k+1}^n}{e} + z_{k+1} - \frac{P_{i,j,k}^n}{r g} - z_k \frac{\ddot{O}}{\emptyset}}{\Delta z^2} \\
& - \frac{k_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n \frac{C_{i,j,k}^n}{e} + z_k - \frac{P_{i,j,k-1}^n}{r g} - z_{k-1} \frac{\ddot{O}}{\emptyset}}{\Delta z^2} + W_{g i,j,k}.
\end{aligned}$$

When solving a given problem using the iterative method, the convergence process of the solution is regularly monitored based on the following condition:

$$\max |C^{r+1} - C^r| \leq e, \quad e=0.0001, \quad \max |P^{r+1} - P^r| \leq e, \quad e=0.001,$$

here r - number of iterations, e - accuracy of the iterative process.

4. Results and their analysis

Based on the developed special software for studying groundwater movement, monitoring, and forecasting their levels, computational experiments were conducted using modern computer technologies.

As can be seen from the figures, the distribution of C concentration over 2 hours varies depending on the soil type: in well-permeable soils, C concentration spreads deeper and faster, while in dense and poorly permeable soils, its movement is slower and accumulates in the upper layers. In general, during the initial period after irrigation, a process of uneven but consistent formation of C concentration distribution across the area is observed.

In the calculations shown in Figure 1, the thickness of the 3 m unsaturated layer, during the first 2-5 hours in all media, including gravel, sand, sandy loam, medium soils, clay, clay, and very dense soils, the water level remains at a depth of 3.0 m. During this period, the infiltration flow is mainly spent on filling soil pores with water and increasing moisture reserves. On the graph, this stage is represented by a nearly horizontal line for all media.

The earliest change in water level is observed in a gravelly medium with the highest permeability. In particular, in 3 hours the water level will decrease by 2.9 m, in 4 hours by 2.7 m, and in 6 hours by 2.25 m. By the end of the 12th hour, the depth of the water level in the gravel layer is 1.85 m. This is explained by the high intensity of the infiltration process.

The rise in water levels in the sandy environment becomes clearly noticeable from 6 o'clock. According to the table, at 6 hours the depth of the water level will be 2.8 m, at 7 hours - 2.6 m, and at 9 hours - 2.35 m. By the end of the study, i.e., by 12 hours, the water level in the sandy environment stabilizes at a depth of about 2.20 m.

In the sandy soil layer, the change in water level occurs relatively slowly. At 6 o'clock, the water level is 2.95 m, at 8 o'clock - 2.75 m, and at 12 o'clock - 2.50 m. In this medium, the rise of the water level is slower than in sand and is represented by more gentle curves on the graph.

In moderate soil conditions, the change in water level develops even more slowly. According to the table, at 7 o'clock the water level will be 2.95 m, at 10 o'clock - 2.80 m, and at 12 o'clock - 2.75 m. This is due to the relatively low filtration coefficient.

In layers of clay and clays, which are low-permeability media, the depth of the water level changes very slowly. In a clay environment, by the end of 12 hours, the water level depth is 2.85 m, and in a clay environment, this indicator remains around 2.94 m. In very dense soils, the infiltration process is sharply limited, within 12 hours the water level practically does not change and is within 2.96-2.99 m.

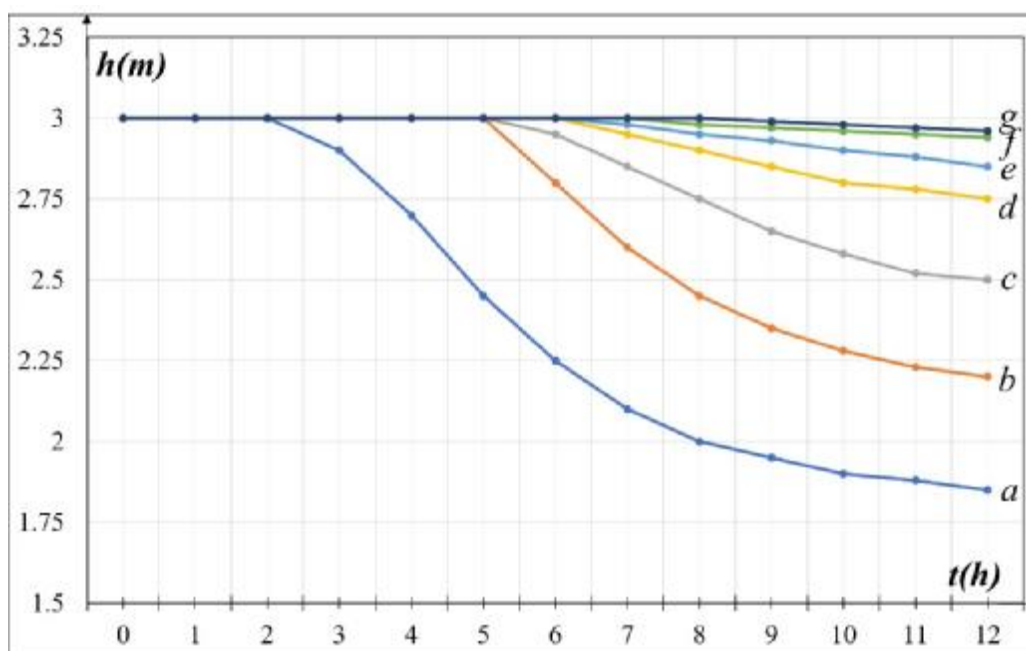


Fig 1. Change in groundwater level over time in various environments (*a*-gravel, *b*-sand, *c*-sandy loam, *d*-loam, *e*-clay, *f*-mud, *g*-dense soil)

Over time, the rate of groundwater level rise in all environments gradually decreases. This is explained by the decrease in the hydraulic gradient during filtration, the expansion of the capillary zone, and the saturation of the aquifer. On the graph, this is manifested in the gradual horizontalization of the curves, i.e., their acquisition of an asymptotic character.

In general, the numerical results obtained from the table and graph clearly show that the infiltration process develops at different rates in different soil environments. The change in groundwater level over time is directly related to the soil permeability level, occurring rapidly in gravelly and sandy environments and slowly in clayey, clay, and very dense soils.

5. Conclusion

In this study, the problem of forecasting the movement and level of groundwater in irrigated agricultural areas was studied on the basis of a comprehensive approach. Based on the analysis of scientific literature, the advantages and limitations of existing modeling approaches were identified, and an improved mathematical model aimed at eliminating them was developed. The proposed model,

based on Darcy's law and convection-diffusion equations, allows taking into account the speed and direction of groundwater movement, as well as the degree of salinity of water, temperature distribution, soil saturation, and other important hydrogeological parameters.

The results of numerical experiments showed that the model is capable of predicting changes in the level and quality of groundwater over time in irrigated areas with sufficiently high accuracy. It has been established that under continuous irrigation conditions, the change in groundwater level depends on the stages of the infiltration process: initially, the infiltration flow is used to moisten the unsaturated zone, and the water level remains practically unchanged, and when the infiltration flow reaches the groundwater, the water level rises first intensively, then slowly, i.e., exponentially.

Such a dynamic of the groundwater level is explained by the filtration properties of the soil, effective porosity, and a decrease in the hydraulic gradient. The obtained results have important practical significance in the effective management of irrigation systems, rational use of water resources, and improvement of the melioration state. In general, the research results serve to make scientifically based decisions on groundwater management and make it possible to effectively use the proposed model to prevent salinization, flooding, and other negative environmental processes.

References

1. Rouhi Rad M., Brozović N., Foster T., Mieno T. Effects of instantaneous groundwater availability on irrigated agriculture and implications for aquifer management // *Resource and Energy Economics*. - 2020. - Vol. 59. - Art. no. 101129. - DOI: 10.1016/j.reseneeco.2019.101129.
2. Amaranto A., Pianosi F., Solomatine D., Corzo G., Muñoz-Arriola F. Sensitivity analysis of data-driven groundwater forecasts to hydroclimatic controls in irrigated croplands // *Journal of Hydrology*. - 2020. - Vol. 587. - Art. no. 124957. - DOI: 10.1016/j.jhydrol.2020.124957.
3. Guilfoos T., Pape A. D., Khanna N., Salvage K. Groundwater management: The effect of water flows on welfare gains // *Ecological Economics*. - 2013. - Vol. 95. - Pp. 31-40. - DOI: 10.1016/j.ecolecon.2013.07.013.
4. Foster T., Brozović N., Butler A. P. Analysis of the impacts of well yield and groundwater depth on irrigated agriculture // *Journal of Hydrology*. - 2015. - Vol. 523. - Pp. 86-96. - DOI: 10.1016/j.jhydrol.2015.01.032.
5. Filippelli S. K., Sloggy M. R., Vogeler J. C., Manning D. T., Goemans C., Senay G. B. Remote sensing of field-scale irrigation withdrawals in the central Ogallala aquifer region // *Agricultural Water Management*. - 2022. - Vol. 271. - Art. no. 107764. - DOI: 10.1016/j.agwat.2022.107764.
6. Castilla-Rho J. C., Mariethoz G., Rojas R., Andersen M. S., Kelly B. F. J. An agent-based platform for simulating complex human-aquifer interactions in managed groundwater systems // *Environmental Modelling & Software*. - 2015. - Vol. 73. - Pp. 305-323. - DOI: 10.1016/j.envsoft.2015.08.018.
7. Nozari S., et al. An integrated modeling approach to simulate human-crop-groundwater interactions in intensively irrigated regions // *Environmental Modelling & Software*. - 2024. - Vol. 179. - Art. no. 106120. - DOI: 10.1016/j.envsoft.2024.106120.
8. Zhang J., et al. An upscaling approach for estimating field-level irrigation water use through the Budyko framework // *Journal of Hydrology*. - 2025. - Vol. 661. - Art. no. 133785. - DOI: 10.1016/j.jhydrol.2025.133785.

9. Foster T., Brozović N., Butler A. P. Modeling irrigation behavior in groundwater systems // *Water Resources Research*. - 2014. - Vol. 50. - No. 8. - Pp. 6370-6389. - DOI: 10.1002/2014WR015620.
10. Foster T., Brozović N., Butler A. P. Modeling irrigation behavior in groundwater systems // *Water Resources Research*. - 2014. - Vol. 50. - No. 8. - Pp. 6370-6389. - DOI: 10.1002/2014WR015620.
11. Egamberdiev K., Khidirova N., Juraev D.A., Ebrahim, Elsayed E. Numerical solution of groundwater modeling for mountains regions of Uzbekistan // *Discover Water* 2024 4:1, vol. 4, no. 1, pp. 111-, Nov. 2024, doi: 10.1007/S43832-024-00159-W.
12. Yusupov. R.A., Murodullaev B.T., Xaitov N. T., Anorboev E.A., Abduvaitov A.A. Application of Telecommunication and Geoinformation Support of Groundwater Monitoring in Irrigated Agriculture Zones // 2021 International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT), Tashkent, Uzbekistan. - 2021. - Pp. 01-05, doi:10.1109/ICISCT52966.2021.9670407.
13. Ravshanov N., Daliev Sh., Abdullaev Z., Khafizov O. Ground and confined underground waters and their salt content // 2020 International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT), Tashkent, Uzbekistan, 2020, pp. 1-12, doi: 10.1109/ICISCT50599.2020.9351467.
14. Ravshanov N., Daliev Sh.K. Non-linear mathematical model to predict the changes in underground water level and salt concentration // *Journal of Physics: Conference Series*. - IOP Publishing, 2020. - T. 1441. - № 1. - C. 012163.
15. Ravshanov N., Zagrebina S.A., Daliev Sh.K. Numerical simulation of unsteady underground water filtration in a porous medium // *Problems of Computational and Applied Mathematics*. - 2019. - №4(22). - Pp. 12-30.
16. Khabibullayev I., Murodullayev B.T., Haqnazarova D.O. Numerical modeling of groundwater filtration processes in irrigation areas // *Problems of computational and applied mathematics*. - 2023. - №3(49). - Pp. 21-32.
17. Khabibullayev I., Murodullayev B.T., Haqnazarova D.O. Three-dimensional mathematical model of groundwater level changes in irrigated land // *Problems of computational and applied mathematics*. - 2023. №5(52). - Pp. 44-55.
18. Murodullaev B.T., Tajikhodjaeva E.R., Haqnazarova D.O. Mathematical and numerical modeling taking into account the physical characteristics of the geofiltration process in irrigated cultivated areas // *Информационные технологии моделирования и управления*. - 2024. - №3(137). - Pp. 185-192.
19. Kurbonov N., Boborakhimov B., Khaknazarova D., Murodullaev B. Numerical modeling of the geofiltration process on irrigated lands taking into account physical factors // *Problems of Computational and Applied Mathematics*. - 2026. - №1(71). - Pp. 57-70.
20. Курбонов Н.М., Хакназарова Д.О., Муродуллаев Б.Т. Математическое моделирование фильтрационных процессов подземных вод для мониторинга и прогноза солевой концентрации в зонах орошаемых территорий // *Проблемы вычислительной и прикладной математики*. - 2025. - № 2/2(66). - С. 109-118.
21. Daliev Sh., Kurbonov N., Ibragimova K., Dzhurayeva Sh. Numerical Modeling of Groundwater Level Changes in Multilayer Media // *AIP Conference Proceedings*. - 2024, pp. 040025-1 - 040025-7, doi: 10.1063/5.0198024.

Немцов М.Л.

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ КРУПНЫХ ПРОИЗВОДСТВ НА ОСНОВЕ ГИБРИДНЫХ ПОДХОДОВ

**Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

Введение

В настоящее время разработка программного обеспечения опирается на ГОСТ, который идентичен международному стандарту ИСО/МЭК 12207-2008* "Системная и программная инженерия. Процессы жизненного цикла программных средств" (ISO/IEC 12207:2008 «System and software engineering - Software life cycle processes»), разработанному подкомитетом ПК 7 «Системная и программная инженерия» (SC 7 System and Software Engineering) [1]. Эти стандарты описывают жизненный цикл разработки программного обеспечения (SDLC).

Был проведен анализ работ крупнейших интеграторов программного обеспечения, посвященных SDLC. Так, в [2] представлены основные принципы и сравнение моделей разработки программного обеспечения. Рассмотрены основные модели разработки и их практическое применение при разработке программного обеспечения. В [3] представили инструментарий для разработчиков, который проводит сравнение альтернативных моделей жизненного цикла. В [4] представлен сравнительный анализ Моделей улучшения процессов разработки (SPI). Данные модели направлены на повышение эффективности, качества и результативности процессов разработки и являются важной частью SDLC. В работе приведено множество практических примеров вместе с их плюсами и недостатками. В [5] описано, что с ростом размеров и сложности проектов разработки доля успешных проектов все еще остается довольно низкой. Указывается, что имеет место тенденция к преувеличению сложности реализации.

В ответ на традиционные подходы к разработке программного обеспечения набирают популярность новые - модели гибкой (flexible) разработки [6]. Гибкие модели SDLC являются компромиссом между отсутствием правил проектирования и слишком большим количеством правил. В настоящее время используются девять подобных методологий SDLC - Adaptive Software Development (ASD), Agile Software Process (ASP), Dynamic System Development Method (DSDM), Extreme Programming (XP), Feature Driven Development (FDD), Rational Unified Process (Rup).

1. Этапы разработки ПО

В SDLC выделяют шесть основных этапов, отображаемых в виде последовательной диаграммы (рис. 1):

1. анализ и определение требований - отвечает на вопрос «Какие проблемы требуют решений?»,
 2. планирование - отвечает на вопрос «Что необходимо сделать?»,
 3. проектирование и дизайн - отвечает на вопрос «Как добиться целей?»,
 4. разработка - регулирует процесс создания продукта,
-
-

5. тестирование - регулирует обеспечение качественной работы продукта,
6. развертывание и поддержка - регулирует использование финального продукта.



Рис. 1. Этапы разработки ПО

Для больших систем каждый из этапов может быть достаточно сложным, и для его эффективной и правильной реализации необходимы отдельные методологии и процедуры. Кроме того, каждый из этапов может быть настолько большой, что должен быть разбит на отдельные подэтапы. Например, проектирование ERP-системы всегда разбивается на несколько отдельных этапов, начиная с верхнего уровня проектирования, определяющего только крупные модули и заканчивая детальным проектированием компонентов, содержащих бизнес-логику приложения.

Необходимо отметить, что в жизненный цикл входят этапы, выполняемые и после завершения основной разработки: развертывание системы в контуре заказчика и последующая тестовая эксплуатация и техническое обслуживание.

Программное обеспечение должно поддерживаться не потому, что некоторые его компоненты «изнашиваются» и нуждаются в замене, а потому, что возможны остаточные ошибки (bugs), устранение которых проводится по мере обнаружения. Поэтому техническое обслуживание обычно является неизбежным для программных систем.

Во многих коммерческих разработках программного обеспечения предварительно выполняется специальный этап до проведения анализа и определения требований. На этом этапе анализируется необходимость и выполнимость проекта в целом и составляется бизнес-план с общими оценками затрат.

Разработка ПО для крупных производств - это не просто создание приложения, а проектирование интегрированной цифровой экосистемы, учитывающей технологические, человеческие, нормативные и бизнес-аспекты. Успех таких проектов зависит не столько от кода, сколько от глубокого понимания производственных процессов, культуры предприятия и готовности к долгосрочной поддержке.

Несмотря на обширную тематику методов разработки программного

обеспечения, обзор показал отсутствие отдельных методов разработки для систем управления крупным производством. Подобные системы имеют ряд специфических особенностей, обусловленных масштабом, сложностью, консерватизмом и критичностью их операций.

2. Основные требования, оказывающие влияние на разработку ПО для производственных предприятий

Разработка программного обеспечения для крупных производственных компаний имеет ряд специфических особенностей, обусловленных масштабом, сложностью и критичностью их операций.

Высокая степень интеграции с существующими системами. Крупные производственные предприятия, как правило, используют традиционные ERP-, MES-, SCADA-, PLM- и другие промышленные системы (например, 1C, SAP, Oracle, Siemens MindSphere, Rockwell Automation). Новое ПО должно бесшовно интегрироваться с системами через API, программные шины или промышленные протоколы (Modbus, OPC UA и др.). Необходимо обеспечивать согласованность данных в реальном времени и поддержку стандартов обмена данными (ISA-95, B2MML и т.п.).

Надёжность и отказоустойчивость. Простой в производстве приводит к существенным финансовым потерям, которые могут исчисляться миллионами рублей в день, а в отдельных случаях - миллионами рублей в час. Поэтому ПО должно быть максимально устойчиво к сбоям, поддерживать резервирование и автоматическое восстановление. Кроме того, необходимо предварительное проведение тестирования на отказоустойчивость, нагрузочного тестирования, моделирования аварийных ситуаций.

Высокий уровень безопасности. Современные тенденции поддерживают обеспечение высокого уровня кибербезопасности и защиты от атак на промышленные сети (ICS/OT-инфраструктуру), соответствие стандартам (ISO/IEC 27001, NIST, IEC 62443), учет сегментации сетей. Аудит действий пользователей и систем также является обязательным.

Масштабируемость и распределенность. ПО часто разворачивается на нескольких производственных площадках (известны случаи одновременного развертывания на нескольких сотнях площадок). Архитектура должна быть горизонтально масштабируемой (микросервисы, облачные или гибридные решения). В случае международного развертывания появляется требование поддержки мультирегиональности (локализация, нормативные акты).

Соблюдение нормативно-правовых требований. Крупные производственные компании обязательно должны соответствовать отраслевым и региональным стандартам (например, FDA 21 CFR Part 11 в фармацевтике, ISO 9001 в СМК производства), обеспечивать прослеживаемость выпускаемой продукции (прослеживаемости продукции от сырья до конечного продукта).

Фокус на эффективность и оптимизацию производственных процессов. ПО разрабатывается и внедряется не только для автоматизации, а также для повышения эффективности - OEE (Overall Equipment Effectiveness). Интеграция с IoT-датчиками проводится для мониторинга состояния оборудования.

Для прогнозирования поломок и оптимизации логистики используются предиктивная аналитика и ML-модели.

Длительные жизненные циклы и поддержка унаследованных (legacy) систем. Промышленное ПО может использоваться десятилетиями, соответственно, требуется поддержка устаревших протоколов, операционных систем и оборудования.

Сложная организационная структура компаний. Многоуровневые процессы согласования: от цехового инженера до высшего менеджмента, необходимость тесного взаимодействия с бизнес-аналитиками, производственными командами, ИТ- и ОТ-командами. Часто требуется проведение пилотных внедрений перед масштабированием.

Ориентация на измеримые бизнес-результаты. Менеджмент компаний ожидает четкой демонстрации экономической эффективности, таких как снижение времени простоя, повышение производительности, сокращение отходов. Поэтому аналитика и отчетность являются неотъемлемой частью системы.

Поддержка офлайн-режимов и ограниченной связности. Если на некоторых производственных участках отсутствует стабильное подключение к сети, то ПО должно корректно работать в офлайн-режиме и синхронизировать данные при восстановлении связи.

3. Выбор SDLC-модели для крупных производственных предприятий

Перечисленные выше требования накладывают существенные ограничения на выбор модели жизненного цикла разработки программного обеспечения (SDLC - Software Development Life Cycle). Дополнительно, для крупных производственных компаний выбор зависит от характера проекта, уровня регулирования, стабильности требований, интеграции с наследуемыми системами и требований к безопасности и надежности. В настоящее время *не существует единой универсальной модели*, но есть оптимальные подходы, часто сочетающие в себе элементы разных методологий.

В качестве одного из таких подходов часто выделяется *гибридная модель (hybrid)*, как наиболее практичный вариант. Гибридная модель - это комбинация предсказуемых и гибких подходов. Планирование, архитектура, безопасность и соответствие нормативам ведется по Waterfall или V-Model. Реализация функционала, итеративная доработка, UI/UX проводится по Agile (Scrum, Kanban).

По статистике, приводимой крупнейшими системными интеграторами, данный подход применяется примерно в 80% промышленных проектов, особенно при интеграции с ERP/MES или разработке IoT-платформ.

Применение гибридной модели обеспечивает документальную строгость для аудитов и сертификаций, позволяет итеративно улучшать систему, учитывая обратную связь от пользователей, а также поддерживает постепенное внедрение (pilotToRoll-out).

Для высоконадежных и регулируемых систем, таких как фармацевтика,

аэрокосмическая отрасль, ядерная или пищевая промышленность, где требуется строгое соответствие стандартам (GAMP, FDA 21 CFR Part 11, ISO 13485 и др.), обычно требования стабильны и заранее определены. В этом случае рекомендуется использовать *V-Model*.

Применение данной модели обеспечивает каждому этапу разработки соответствующий этап тестирования; прозрачное и легкое прохождение аудита. При этом, следует учитывать, что V-Model очень чувствительна к изменениям требований и обладает длительным циклом запуска конечного продукта (time-to-market).

Данная модель рекомендуется для сильно валидируемых систем, например: SCADA-панели, ПО для контроля качества, системы управления рецептурами и т.п.

Статистика системных интеграторов указывает на ограниченную возможность использования *Agile-моделей* (*Scrum / Kanban*). Гибкие модели подходят для проектов, требования к которым недостаточно ясны или постоянно меняются, проект включает множество взаимодействий с заказчиком или у проекта много заинтересованных сторон. Обычно их применяют при разработке внутренних инструментов, например, дашбордов, мобильных приложений для логистики, систем отчетов и т.п.

В облачных или гибридных системах (например, аналитика на основе данных с датчиков) и при разработке микросервисов, не связанных напрямую с управлением оборудованием, могут применяться DevOps + CI/CD-модели. Они позволяют быстро выявлять ошибки при разработке за счет автоматизированных тестов, обеспечивают высокий уровень масштабируемости. В то же время существуют риски недостаточной проработки тестов, что может привести к пропуску ошибок. Зависимость от инфраструктуры в случае сбоя может остановить весь процесс разработки.

В большинстве случаев применения DevOps + CI/CD - модели являются частью гибридной модели.

4. Определение требований к методологиям разработки

На основе проведенного сравнительного анализа можно выделить следующие требования к методам разработки.

Сложность проекта - множество требований, сложность архитектуры и технологического стека. Проекты с высокой сложностью могут извлечь выгоду из методологий, основанных на итеративной разработке.

Постоянство требований на всем протяжении проекта. Стабильность требований является решающим фактором. Проекты с четко определенными и формализованными требованиями могут склоняться к линейному подходу, в то время как проектам с изменяющимися требованиями необходимо выбирать гибкие методологии.

Вовлеченность заказчика. Значительную роль играет степень вовлеченности заказчика и/или конечных пользователей на протяжении всего процесса разработки. Гибкие методологии опираются на регулярную обратную связь, в то время как в традиционных методологиях привлечение заказчика в

основном на этапе ТЗ.

Гибкость и адаптивность - способность проекта учитывать изменения и адаптироваться к меняющимся требованиям также является важным фактором. Гибкие методологии превосходят в обеспечении гибкости, в то время как традиционные методологии испытывают трудности с адаптацией к изменениям, особенно на поздних этапах.

Сроки и предсказуемость - традиционные методологии предлагают относительно более реальные сроки в отличие от Agile-методологии, ориентированной на изменение и развитие.

5. Выбор и обоснование модели разработки ПО для крупных производственных предприятий

В табл. 1 приведены рекомендации по выбору наиболее подходящей SDLC-модели для крупных промышленных предприятий на основании сценария проекта.

Таблица 1

Рекомендации по выбору модели

Сценарий	Модель
ПО для управления оборудованием, валидация обязательна	V-Model или гибрид с V-Model как основой
Интеграция с ERP/MES, новые цифровые сервисы	Гибридная (Agile + Waterfall)
Внутренние инструменты, аналитика, мобильные приложения	Agile (Scrum/Kanban) с усиленной документацией
IoT-платформа, облачные сервисы, ML-модели	Agile + DevOps, с поддержкой процессов соответствия информационной безопасности компании

В настоящее время многие крупные производители используют *ScaledAgile Framework (SAFe)* или *DisciplinedAgile (DA)* - это масштабируемые гибридные методологии, специально созданные для крупных промышленных предприятий (Enterprise).

Заключение

Разработка программного обеспечения для крупных производств - это не просто создание приложения, а проектирование интегрированной цифровой экосистемы, учитывающей технологические, человеческие, нормативные и бизнес-аспекты. Успех таких проектов зависит не столько от кода, сколько от глубокого понимания производственных процессов, культуры предприятия и готовности к долгосрочной поддержке.

В условиях высоких рисков, сложных интеграций и строгой прослеживаемости - успех определяется *не выбором* самого современного стека технологий, *а умением сочетать* дисциплину Waterfall / V-Model и гибкость Agile в единой гибридной модели.

Как показывает практика лидеров косметической отрасли [7] - гибридный подход становится де-факто стандартом: архитектура и валидация проектируются с учётом GAMP 5 и ISO 22716, а пользовательские интерфейсы, аналитика и инструменты операторов развиваются итеративно, в тесном

взаимодействии с конечными пользователями. Только так можно обеспечить реальную ценность для бизнеса: снижение отходов, ускорение вывода продуктов, повышение ОЕЕ и устойчивость к сбоям.

Несмотря на то, что ни в одном стандарте нет единой рекомендации о применении гибридной модели, она стала де-факто отраслевым стандартом для сложных, интегрированных и регулируемых промышленных проектов. Лучшая SDLC-модель для крупного производства - это гибрид, где строгость регуляторики сочетается с гибкостью разработки.

Список использованных источников

1. ISO/IEC 12207:2008. Systems and software engineering - Software life cycle processes. - Женева: ISO, 2008. - 154 с.
2. A comparative study of Software Development Life Cycle (SDLC) models/ B. Bajrami, I. Jolevski, K. Veljanovska// 14th Int. Conf. on Applied Internet and Information Technologies (AIIT 2024). - Zrenjanin, Serbia, 2024. - P. 162-172.
3. <https://www.practitest.com/resource-center/article/top-5-alm-qc-alternatives/>.
4. Cornide-Reyes H. et al. Analysis of the use of software process improvement models in agile development// Ingeniare. Revista chilena de ingenieria. - 2024. - Vol. 32, № 13. - DOI: 10.4067/S0718-33052024000100213.
5. Delivering large-scale IT projects on time, on budget, and on value/ M. Bloch, S. Blumberg, J. Laartz. - 2012. - <https://www.mckinsey.com/capabilities/tech-and-ai/our-insights/delivering-large-scale-it-projects-on-time-on-budget-and-on-value>.
6. https://medium.com/@great_it/agile-waterfall-or-hybrid-which-is-best-b6bfcededa50.
7. Tulsian A. Application of Hybrid Agile-Waterfall in Digitization of the Fashion Industry / A. Tulsian. - Harrisburg : Harrisburg University of Science and Technology, 2025. - URL: <https://digitalcommons.harrisburgu.edu/dandt/81/>
8. https://www.lts.com/sites/default/files/resources/pdf/whitepapers/2023-03/MBSE_0.pdf.
9. Akundi A. et al. Industry-Driven Model-Based Systems Engineering (MBSE) Workforce Competencies - An AI-Based Competency Extraction Framework// Systems. - 2025. - Vol. 13, № 9. - Art. 781. - DOI: 10.3390/systems13090781.
10. Wyn S., Clark C. What You Need to Know About GAMP® 5 Guide, 2nd Edition // Pharmaceutical Engineering/ISPE. - January-February 2023. - <https://ispe.org/pharmaceutical-engineering/january-february-2023/what-you-need-know-about-gampr-5-guide-2nd-edition>.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Неъматов А., Садиков Р.Т., Махмудова М.М., Хужамурадова М.Г. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ В ГАЗОВЫХ ПЛАСТАХ С НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДОЙ

Ташкентский университет информационных технологий
имени Мухаммада ал-Хоразмий, Ташкент, Узбекистан

Введение. Качество и эффективность разработки газовых месторождений оцениваются по коэффициентам извлечения газа и газоконденсата из пласта, а также по достигнутым технико-экономическим показателям. Повышение эффективности разработки газовых месторождений требует более глубокого изучения и понимания процессов, происходящих в продуктивных пластах в процессе добычи газа.

В настоящее время нельзя утверждать, что теория проектирования и разработки продуктивных слоистых газовых месторождений полностью сформирована. Практика разработки газовых и газоконденсатных месторождений постоянно ставит перед учёными и специалистами отрасли новые задачи и проблемы. Вместе с тем результаты лабораторных экспериментов и научных исследований свидетельствуют о значительных достижениях в данной области. Эти вопросы подробно рассмотрены в научных работах и монографиях А.Т. Горбунова, М.Д. Розенберга, Б.Б. Лапука, И.А. Чарни, В.Н. Шелкачева и других исследователей [4-6]. Ученики академика Л.С. Лейбензона внесли существенный вклад в развитие подземной гидромеханики нефти и газа [3].

В настоящее время в развитых странах, включая Республику Узбекистан, разработка научно обоснованных методов математического моделирования реальных нефтегазовых объектов, а также проведение вычислительных экспериментов по изучению нестационарных процессов движения жидкостей и газов в пористой среде с неоднородной структурой остаются одними из наиболее актуальных задач.

При проектировании, прогнозировании и анализе разработки нефтегазовых месторождений особый интерес представляют задачи нестационарной фильтрации жидкостей и газов с различными физическими свойствами в одномерных и многомерных многослойных пористых средах. Для их решения эффективно применяется метод триады «модель - алгоритм - программа», являющийся интеллектуальной основой математического моделирования и формирующий цепочку «объект - модель - алгоритм - программа - вычислительный эксперимент».

В математическом моделировании реальные процессы описываются с помощью математических моделей, основанных на методах усреднения характеристических параметров по времени, пространству и статистической совокупности. Последний метод позволяет перейти от дискретных распределений к непрерывным и, как следствие, применять хорошо разработанные методы дифференциального исчисления в механике сплошных сред.

Взаимосвязь между проницаемостью и давлением в пласте впервые была отмечена в научных исследованиях турецкого учёного Йылмаза. В частности, им был введён термин «соответствие проницаемости», который рассматривает изменение проницаемости как функцию снижения пластового давления.

Математическая модель нестационарного процесса фильтрации жидкостей или газов в пористых средах представляется в виде краевой задачи для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Аналитическое решение таких краевых задач является весьма сложным, и во многих случаях получение точного решения даже для простейших моделей представляет значительные трудности.

Фрагментарно-неоднородный (зональный) пласт представляет собой слой, состоящий из нескольких зон (участков) с различной проводимостью - неоднородным распределением фильтрационных свойств по площади (рис. 1).

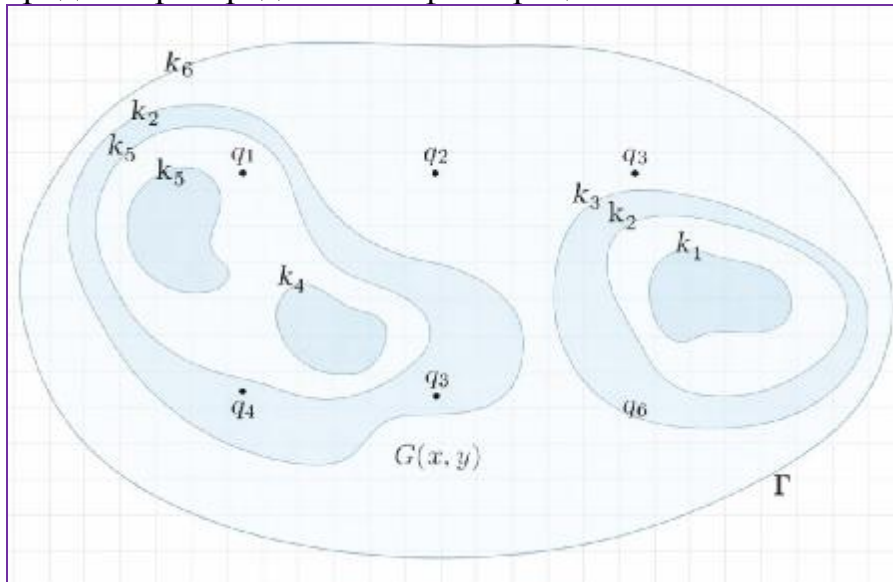


Рис. 1. Площадь кусочно-неоднородной газовой фильтрации

Математическая модель краевой задачи кусочно-неоднородной фильтрации по коэффициенту проницаемости может быть выражена в виде дифференциального уравнения двумерного параболического типа с частными производными следующим образом

$$2amhm \frac{\partial P_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k(x, y) \frac{\partial P^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k(x, y) \frac{\partial P^2}{\partial y} - Q, \quad (x, y) \in G \quad (1)$$

Для определения основных параметров газовых месторождений рассмотрим следующие начальные и граничные условия решения параболического дифференциального уравнения (1):

$$P(x, y, t) = P_H(x, y), \quad t = 0, \quad (2)$$

$$\frac{k(x, y)}{m} \frac{\partial P}{\partial n} = a(P - P_A), \quad (x, y) \in G, \quad (3)$$

$$\oint_{s_{i_q}} \frac{k(x, y)}{m} \frac{\partial P}{\partial n_1} ds = -q_{i_q}(t), \quad (x, y) \in s_{i_q}, \quad i_q = \overline{1, N_q}. \quad (4)$$

$$Q = \sum_{i,j=1}^{N_q} d_{i,j} q_{i,j},$$

Здесь n - внутренняя нормаль к границе; $q_{i,j}$ - дебит газовой скважины; N_q - количество скважин; s_{i_q} - контур i_q -й скважины; P - давление пласта газовой области; k - коэффициент проницаемости пласта; d - дельта-функция Дирака, $d_{ij}=0$ - скважина отсутствует; $d_{ij}=1$ скважина есть; m -коэффициент вязкости газа; m - коэффициент пористости пластов; n_l -нормаль к контуру s ; G - область фильтрации; Γ - граница области фильтрации.

В математической модели краевой задачи коэффициент проницаемости k понимается как кусочно-однородный слой. При этом коэффициент проводимости можно рассматривать как кусочно-однородную дискретную функцию, т.е. имеет разные значения в определенных частях дискретной области

$$k(x, y) = \begin{cases} k_1, & (x, y) \in G_1, \\ k_2, & (x, y) \in G_2, \\ \dots & \dots \\ k_n, & (x, y) \in G_n. \end{cases}$$

Здесь $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$ - кусочно-однородные области (рис.1); $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ - кусочно-однородные области проводимости значения коэффициентов.

Для численного моделирования поставленной краевой задачи воспользуемся методом конечных разностей (1)-(4). Преобразуем ранее поставленную краевую задачу в безразмерную. Для этого в дифференциальном уравнении вводим следующие обозначения:

$$P^* = P / P_0; \quad x^* = x / L; \quad y^* = y / L; \quad k^* = k / k_0; \quad t = \frac{k_0 P_0}{a m m L^2} t; \quad q^* = \frac{P_{at} m}{p k_0 h P_0^2} Q.$$

Здесь P_0 - значение начального давления слоя определенного характера; k_0 - начальное значение проницаемости слоя определенного характера; L - длина газового слоя определенного характера.

Используя обозначения, мы выполняем преобразования в задаче и, для удобства, оставляя звездочки, приходим к следующей безразмерной задаче:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, y) \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(x, y) \frac{\partial P}{\partial y} \right), \quad (x, y) \in G \quad (5)$$

$$P(x, y) = P_H(x, y), \quad t = 0; \quad (6)$$

$$k(x, y) \frac{\partial P}{\partial n} = a(P - P_A), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (7)$$

$$\oint_{s_{i_q}} \frac{k(x, y)}{m} \frac{\partial P}{\partial n_1} ds = -q_{i_q}(t), \quad (x, y) \in s_{i_q}, \quad i_q = \overline{1, N_q}. \quad (8)$$

При решении безразмерной краевой задачи можно использовать метод конечных разностей. Использование численного моделирования с применением метода конечных разностей при решении подобных кусочно-неоднородных краевых задач позволяет разработать эффективные алгорит-

мы.

Для численного моделирования приведённой к безразмерному виду краевой задачи (5) - (8) совместно с границей Γ заменяем область фильтрации G на дискретную область с одинаковым шагом Δx , Δy сетки:

$$W_{xyt} = \left\{ (x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, t_l = l\Delta t); i = \overline{0, n_j}; j = \overline{1, m_i}, l = \overline{0, N_t}, \Delta t = \frac{1}{N_t} \right\}.$$

Здесь W_{xyt} - дискретная область сетки; Δx - шаг по оси x ; Δy - шаг по оси y ; Δt - t шаг времени; N - количество узлов дискретной области; L - длина слоя.

Для построения конечно-разностной задачи в этой области применяем алгоритмическую идею схемы переменных направления (схема поперечного сечения) [1-3, 12]. Переход от l -го временного слоя к $l+1$ слою осуществляется в два этапа с шагом 0.5. В результате приведенное выше уравнение (6) приводит к последовательному решению системы двух конечных разностных уравнений. Тогда, основываясь на схеме поперечного сечения, эти уравнения можно записать в виде следующей системы конечных разностных уравнений для внутренних узлов в временном слое $l+0.5$ и $l+1$.

$$\begin{aligned} \frac{\bar{P}_{i,j} - \hat{P}_{i,j}}{\Delta t / 2} &= \frac{k_{i-0.5,j} \bar{P}_{i-1,j}^2 - (k_{i-0.5,j} + k_{i+0.5,j}) \bar{P}_{i,j}^2 + k_{i+0.5,j} \bar{P}_{i+1,j}^2}{\Delta x^2} + \\ &+ \frac{k_{i,j-0.5} \hat{P}_{i,j-1}^2 - (k_{i,j-0.5} + k_{i,j+0.5}) \hat{P}_{i,j}^2 + k_{i,j+0.5} \hat{P}_{i,j+1}^2}{\Delta y^2} - q_{i,j} d(x - x_i)(y - y_j), \\ \frac{P_{i,j} - \bar{P}_{i,j}}{\Delta t / 2} &= \frac{k_{i-0.5,j} \bar{P}_{i-1,j}^2 - (k_{i-0.5,j} + k_{i+0.5,j}) \bar{P}_{i,j}^2 + k_{i+0.5,j} \bar{P}_{i+1,j}^2}{\Delta x^2} + \\ &+ \frac{k_{i,j-0.5} \bar{P}_{i,j-1}^2 - (k_{i,j-0.5} + k_{i,j+0.5}) \bar{P}_{i,j}^2 + k_{i,j+0.5} \bar{P}_{i,j+1}^2}{\Delta y^2} - q_{i,j} d(x - x_i)(y - y_j), \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\hat{P}_{i,j}$ - давление газа в l -м временном слое; $\bar{P}_{i,j}$ - давление газа в $l+0.5$ -м временном слое; $P_{i,j}$ - давление газа в $l+1$ -м временном слое.

Из системы уравнений с конечной разностью (9) видно, что уравнения нелинейны относительно функции давления. Это, в свою очередь, несколько затрудняет численное решение задачи. Поэтому к нелинейным частям в уравнениях применяется квазилинейный метод и метод итераций для приближения к решению [3]. Согласно этому методу нелинейные части системы конечных разностных уравнений (9) выражаются следующим образом:

$$y(P) \approx y(\bar{P}) + (P - \bar{P}) \frac{y'(\bar{P})}{y'(\bar{P})}. \quad (10)$$

Здесь функция \bar{P} - приближенно сходящаяся функция, которая определяется в процессе итерации, где $\bar{P} = P_{i,j}^{(s)}$. Начальное значение итерации в начальном временном слое берется из начального условия, т.е. $P_{i,j}^{(0)} = P_{0i,j}$, а в

последующих временных слоях берется из значения функции в одном предыдущем временном слое, т.е. $P_{i,j}^{(0)} = P_{i,j}^{(l)}$.

Если записать формулу $P^2 \gg 2P - P^0$ (10) для квадрата функции давления в промежутке времени $l+0.5$ и $l+1$, то вместо системы конечных разностных уравнений (9) получим следующие уравнения.

$$\begin{aligned} & 2k_{i-0.5,j} P_{i-1,j} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (k_{i-0.5,j} + k_{i+0.5,j}) P_{i,j} + \frac{Dx^2}{Dt/2} \dot{P}_{i,j} + 2k_{i+0.5,j} P_{i+1,j} = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} k_{i-0.5,j} P_{i-1,j} - (k_{i-0.5,j} + k_{i+0.5,j}) P_{i,j} + k_{i+0.5,j} P_{i+1,j} - \\ & - \frac{Dx^2}{Dy^2} \frac{\partial}{\partial t} k_{i,j-0.5} (2P_{i,j-1} - P_{i,j}) - (k_{i,j-0.5} + k_{i,j+0.5}) (2P_{i,j} - P_{i,j}) + \\ & + k_{i,j+0.5} (2P_{i,j+1} - P_{i,j}) - \frac{Dx^2}{Dt/2} \dot{P}_{i,j} - d_{i,j} q_{i,j}. \\ & 2k_{i,j-0.5} P_{i,j-1} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (k_{i,j-0.5} + k_{i,j+0.5}) P_{i,j} + \frac{Dx^2}{Dt/2} \dot{P}_{i,j} + 2k_{i,j+0.5} P_{i,j+1} = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} k_{i,j-0.5} P_{i,j-1} - (k_{i,j-0.5} + k_{i,j+0.5}) P_{i,j} + k_{i,j+0.5} P_{i,j+1} - \\ & - \frac{Dx^2}{Dy^2} \frac{\partial}{\partial t} k_{i-0.5,j} (2P_{i-1,j} - P_{i,j}) - (k_{i-0.5,j} + k_{i+0.5,j}) (2P_{i,j} - P_{i,j}) + \\ & + k_{i+0.5,j} (2P_{i+1,j} - P_{i,j}) - \frac{Dx^2}{Dt/2} \dot{P}_{i,j} - d_{i,j} q_{i,j}, \quad l = l+1. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{P}_{i-1,j}, \bar{P}_{i,j}, \bar{P}_{i+1,j}$ - значения функции давления во временном слое $l+0.5$;

$\hat{P}_{i-1,j}, \hat{P}_{i,j}, \hat{P}_{i+1,j}$ - приближенные значения функции давления во временном слое $l+0.5$;

$\hat{P}_{i,j-1}, \hat{P}_{i,j}, \hat{P}_{i,j+1}$ - значения функции давления во временном слое l ;

$P_{i,j-1}, P_{i,j}, P_{i,j+1}$ - значения функции давления во временном слое $l+1$;

$\hat{P}_{i,j-1}, \hat{P}_{i,j}, \hat{P}_{i,j+1}$ - приближенные значения функции давления во временном слое $l+1$.

Аппроксимируя первое и второе граничные условия из уравнения, запишем следующую систему трехточечных конечных разностных уравнений для временного слоя $l+0.5$:

$$\begin{aligned} & \ddot{P}_{0,j} (3 - 2DxLa) + 4\bar{P}_{1,j} - \bar{P}_{2,j} = 2DxaLP_A, \\ & \ddot{P}_{i,j} a_i \bar{P}_{i-1,j} - b_i \bar{P}_{i,j} + c_i \bar{P}_{i+1,j} = -d_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1, \\ & \ddot{P}_{N,j} (3 - 2DxLa) + 4\bar{P}_{N-1,j} - \bar{P}_{N-2,j} = -2DxaLP_A; \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $a_i = 2k_{i-0.5,j} P_{i-1,j}$; $b_i = a_i + c_i - \frac{Dx^2}{Dt/2}$; $c_i = 2k_{i+0.5,j} P_{i+1,j}$;

$$d_i = \frac{Dx^2}{Dt/2} P_{i,j} + \frac{\partial}{\partial t} k_{i-0.5,j} P_{i-1,j} - (k_{i-0.5,j} + k_{i+0.5,j}) P_{i,j} + k_{i+0.5,j} P_{i+1,j} -$$

$$+ \frac{Dx^2}{Dy^2} \frac{\partial}{\partial t} k_{i,j-0.5} (2P_{i,j-1} \hat{P}_{i,j-1} - P_{i,j-1}^2) - (k_{i,j-0.5} + k_{i,j+0.5}) (2P_{i,j} \hat{P}_{i,j} - P_{i,j}^2) + \\ + k_{i,j+0.5} (2P_{i,j+1} \hat{P}_{i,j+1} - P_{i,j+1}^2) - d_{i,j} q_{i,j},$$

Аналогично, аппроксимируя третье и четвертое граничных условий, упрощая второе конечно-разностное уравнение для временного слоя $l+1$, мы приходим к следующей системе трех точечных уравнений.

$$\begin{cases} (3 - 2Dy\alpha L) P_{i,0} + 4P_{i,1} - P_{i,2} = 2Dy\alpha L P_A, \\ a_j P_{i,j-1} - b_j P_{i,j} + c_j P_{i,j+1} = -d_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1, \\ (3 - 2Dy\alpha L) P_{i,N} + 4P_{i,N-1} - P_{i,N-2} = -2Dy\alpha L P_A, \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{Здесь } a_j = 2k_{i,j-0.5} P_{i,j-1}; b_j = a_j + c_j - \frac{Dy^2}{Dt/2}; c_j = 2k_{i,j+1} P_{i,j+1};$$

$$d_j = \frac{Dy^2}{Dt/2} P_{i,j} + \frac{\partial}{\partial t} k_{i,j-0.5} P_{i,j-1} - (k_{i,j-0.5} + k_{i,j+0.5}) P_{i,j} + k_{i,j+0.5} P_{i,j+1} + \\ + \frac{Dy^2}{Dx^2} \frac{\partial}{\partial t} k_{i-0.5,j} (2P_{i-1,j} \bar{P}_{i-1,j} - P_{i-1,j}^2) - (k_{i-0.5,j} + k_{i+0.5,j}) (2P_{i,j} \bar{P}_{i,j} - P_{i,j}^2) + \\ + k_{i-0.5,j} (2P_{i-1,j} \bar{P}_{i-1,j} - P_{i-1,j}^2) - (k_{i-0.5,j} + k_{i+0.5,j}) (2P_{i,j} \bar{P}_{i,j} - P_{i,j}^2) + \\ + k_{i+0.5,j} (2P_{i+1,j} \bar{P}_{i+1,j} - P_{i+1,j}^2) - d_{i,j} q_{i,j}$$

Система (12) решается методом простой прогонки в направлении x во временном слое $l+0.5$, затем система (12) решается в временном слое $l+1$ [7-9, 15].

Система конечно-разностных уравнений нелинейна, поэтому к ней наряду с методом прогонки применяется итерационный метод. Процесс повторения продолжается до тех пор, пока не будет выполнено следующее условие

$$\max_{i,j} |P_{i,j}^{(s)} - P_{i,j}^{(s-1)}| \leq \epsilon. \quad (13)$$

Здесь ϵ - степень точности итерации, заранее заданное малое число;

s - количество повторений итерации.

Впервые значение нулевой итерации функции давления выводится из начального условия. В каждом временном интервале берется значение предыдущего временного слоя, то есть $P_{i,j}^{(0)} = P_{i,j}^l$.

Вычислительный алгоритм. На основе разработанной численной модели двумерная краевая задача фильтрации газа в пористой среде с помощью схемы переменных направлений сводится к двум конечным разностным задачам и решается методом прогонки. В каждом временном слое используется метод итерации [10-14].

Алгоритм расчета основных показателей разработки газового месторождения реализуется в два этапа в каждом временном слое.

На первом этапе расчет в полувременном слое по направлению переменной x производится следующим образом:

- вычисление коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) уравнения (12);
- начальные значения a_0, b_0 коэффициентов простого метода Гидаша определяются из левых граничных условий;
- рассчитываются значения коэффициентов a_i и b_i ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) простого способа перегонки;
- конечное значение $P_{N,j}$ функции давления определяется из правых граничных условий области дискретной фильтрации;
- значения $P_{i,j}$ функции давления вычисляются методом простой встречной прогонки в обратном направлении;

Второй этап алгоритма реализуется аналогичным образом, по направлению переменной y во временном слое $l+1$;

- итерационный процесс продолжается до тех пор, пока условие (13) не будет выполнено, если условие не выполнено, повторения повторяются.

Расчеты на первом и втором этапах повторяются на каждом временном шаге. Каждое полученное решение служит начальным условием для следующего временного шага.

Вычислительные эксперименты. Для проведения вычислительных экспериментов были получены следующие начальные значения параметров для газифльтрационного слоя (табл. 1).

Таблица 1

Параметры, использованные в вычислительных экспериментах и их значения

Вводимые данные	Обозначения	Числовые значения и размеры
Начальное давление пласта	P	300 атм
Вязкость газа	m	0.03-0.05 Спуаз
Проницаемость пласта	k	0.1- 0.5 Дарси
Коэффициент пористости	m	0.1- 0.3
Объем скважины	Q	600000 м ³ /сут
Характерная длина зоны фильтрации	L	10000 м
Мощность пласта	h	10 м
Время разработки газового месторождения	T	1080 сут
Время шага расчета	DT	1 сут

Результаты 3-летней разработки газовых месторождений на основе вышеуказанных значений параметров представлены в виде рис. 2, 3.

На рисунках показано распределение давления в газовом пласте при различных значениях коэффициентов проницаемости за 1080 дней, когда значения заданы с большим разбросом, то есть с большим разбросом. Полученные результаты расчетов показывают, что в зонах с большим значением коэффициента проницаемости скорость распределения давления в пласте возрастает. На этих рисунках из-за малого коэффициента проницаемости вокруг скважины наблюдается снижение давления вокруг скважины.

В первом расчетном эксперименте для газового пласта с одной скважиной в центре, расходом $q=600000$ м³/сут, коэффициентом вязкости 0,02 и ко-

эффицентом неравномерной проницаемости были получены следующие значения:

$$k(x) = \begin{cases} 0.05 & 0.0 \leq x \leq 0.35, \\ 0.15 & 0.35 < x < 0.65, \\ 0.05 & 0.65 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

В связи с расположением скважины в центре и неравномерными значениями коэффициента проницаемости пласта вдоль оси x , из результатов видно, что на графиках наблюдается излом в точках 0,3 и 0,7 оси x . Это указывает на то, что в этих точках коэффициент $k(x)$ уравнения значительно изменяет свое значение.

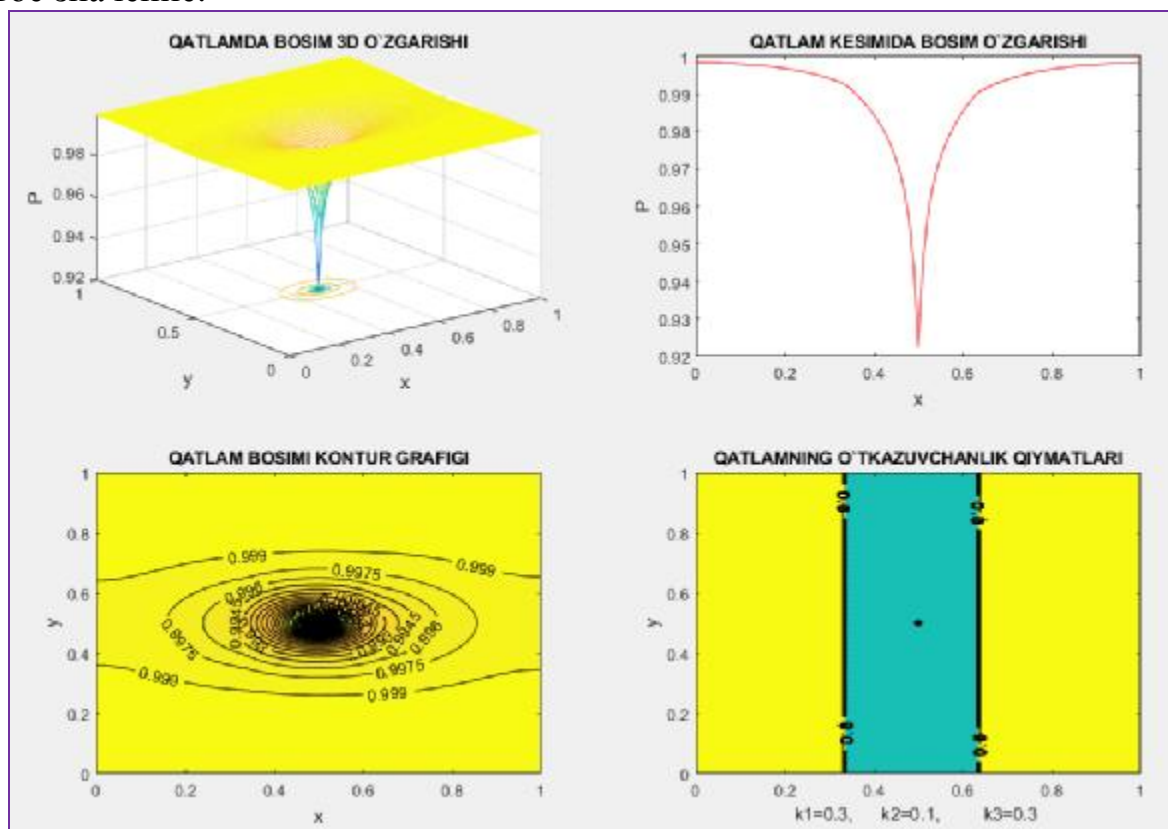


Рис. 2. Визуальное графическое представление изменений давления в слое кусочно-неоднородных газовых полей.

Во втором расчетном эксперименте для двух симметрично расположенных в центре скважин были получены следующие значения: расход $q_1=600000$ м³/сут и $q_2=600000$ м³/сут, коэффициент вязкости 0,02 и газовый слой с неравномерным коэффициентом проницаемости:

$$k(x) = \begin{cases} 0.3 & 0 \leq x \leq 0.25, \\ 0.1 & 0.25 < x \leq 0.36, \\ 0.03 & 0.36 < x \leq 0.64, \\ 0.1 & 0.64 < x \leq 0.75, \\ 0.3 & 0.75 < x \leq 1.0. \end{cases}$$

В связи с расположением скважины в центре и неравномерностью коэффициента проницаемости слоя вдоль оси x , видно, что на графиках наблю-

дается излом в точках 0,3 и 0,7 оси x . Это указывает на то, что в этих точках коэффициент $k(x)$ уравнения значительно изменяет свое значение.

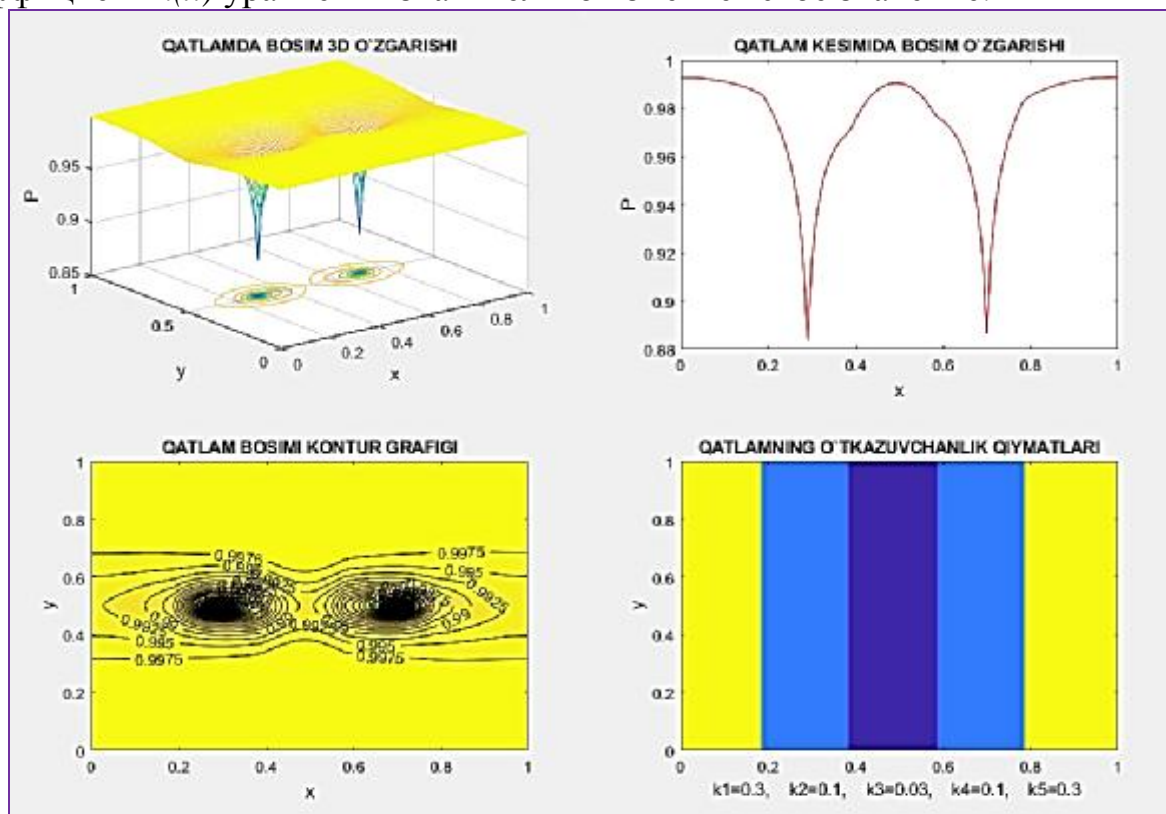


Рис. 3. Визуальное графическое представление изменений давления в кусочно-неоднородном газоносном пласте

На рис. 3 показаны изменения давления в неоднородной пористой среде в различных графических представлениях для случая пяти зон с пятью различными значениями коэффициента проницаемости в горизонтальном направлении.

Эти вычислительные эксперименты визуально представлены на рис. 2 и 3, где наблюдается неоднородность значений коэффициента проницаемости слоя вдоль оси x в соответствующих точках, т.е. в точках оси x , равных 0,25, 0,36, 0,5 и 0,64, 0,75 соответственно. Это указывает на то, что в этих точках значения коэффициента проницаемости $k(x)$ в математической модели значительно различаются.

Заключение. Формируя краевую задачу процесса фильтрации в неоднородных газоносных пластах, было проведено численное моделирование с использованием схемы переменного направления и метода управления. Была разработана дискретная модель задачи и вычислительный алгоритм для решения двумерной краевой задачи, проведены вычислительные эксперименты и проанализированы их результаты.

Данное программное обеспечение для фильтрации газа в неоднородных пористых средах обеспечивает расчеты ключевых показателей, численные результаты в графической и анимированной форме, а также позволяет проводить анализ процесса для специалистов.

Разработанная математическая модель, алгоритм численного решения и

результаты полученных вычислительных экспериментов могут быть использованы при определении и исследовании основных показателей газовых месторождений.

Список использованных источников

1. Абуталиев Ф.Б., Баклушин М.Б., Ербеков Я.С., Умаров У.У. Эффективные приближенно-аналитические методы для решения задач теории фильтрации. - Ташкент: Фан, 1978. - 236 с.
2. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. –М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. - 416 с.
3. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. Мир, М., 1968., 184 с.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. - 656 с.
5. Самарский А.А., Михайлов М. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. - М. Физматлит, 2005. - 320 с.
6. Закиров С.Н., Лапук Б.Б. Проектирование и разработка газовых месторождений. - М.: Недра, 1974. - 376 с.
7. Назирова Э.Ш., Неъматов А. Садилов Р.Т. Бир жинсли бўлмаган бўлакчи ғовак мухитда суюқликлар филтрация жараёнини математик моделлаштириш// TATU Xabarları jurnali. 2020, №1 (53). - Б. 40-54.
8. Назирова Э.Ш., Садилов Р.Т., Исмоилов Ш.Р. Бўлакчи бир жинсли бўлмаган соҳа учун Пуассон тенгламасига қўйилган чегаравий масалани ечишда итерацион усул // «Инновацион ғоялар, ишланмалар амалиётга: муаммолар ва ечимлар», Халқаро илмий-амалий онлайн анжуман. -Андижон - 2020. - Б. 117-121.
9. Назирова Э.Ш., Садилов Р.Т., Набиев И.Ш. Эффективный вычислительный алгоритм для решения задач фильтрации газа в пористой среде// “Амалий математика ва инфорацион технологияларнинг долзарб муаммолари”, халқаро анжуман тезислари тўплами. - Тошкент - 2019. - С. 91-92.
10. Неъматов А., Назирова Э.Ш. Численное моделирование процесса фильтрации газа в пористых средах// Международный академический вестник. № 1(13). - 2016. - С. 52-56.
11. Неъматов А., Назирова Э.Ш., Содилов Р.Т. Ғовак мухитда нефтнинг филтрланиш жараёнининг чегаравий масаласини сонли моделлаштириш// Халқаро илмий-техник конференция “Радиотехника, телекоммуникация ва ахборот технологиялари: муаммолари ва келажак ривож”, мақолалар тўплами, 1-том. - Тошкент - 2015. -Б. 8-11.
12. Равшанов Н., Неъматов А., Исмаилов Ш. Эффективный численный алгоритм решения задач фильтрации нефти в пористой среде// Проблемы вычислительной и прикладной математики, № 5(43), 2022, с. 16-29.
13. Nematov A., Mahmudova M. A Numerical Method for Solving the Problem of Gas Filtration in an Interconnected Three-Layer Porous Medium Based on an Opaque Finite Difference Scheme// 2024 IEEE 3rd Int. Conf. on Problems of Informatics, Electronics and Radio Engineering (PIERE), Novosibirsk, Russian Federation, 2024, pp. 1030-1035.
14. Makhmudova M., Sadikov R., Nematov A. Algorithm and program for solving the boundary value problem for calculating the main parameters of three-layer gas fields// AIP Conf. Proc., 2024; 3244 (1): 020030. <https://doi.org/10.1063/5.0242045>.
15. Nazirova E., Makhmudova M., Shukurova M., Nematov A. Mathematical modeling of the multidimensional filtration process in directly connected gas layers// AIP Conf. Proc. 2025; 3356 (1): 020012. <https://doi.org/10.1063/5.0296310>.

Ravshanov N., Boborakhimov B., Nabiyeva I.S.
MATHEMATICAL MODELING OF THE DISTRIBUTION OF HARMFUL
SUBSTANCES IN THE ATMOSPHERE IN VARIABLE-DIRECTION
CURRENTS

Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research
Institute, Tashkent, Uzbekistan
Samarkand branch of the Tashkent University of Information Technologies
named after Muhammad al-Khwarizmi, Samarkand, Uzbekistan

1. Introduction

Today, the study of the distribution of harmful substances in the atmosphere is one of the relevant scientific directions from the perspective of ecology, health-care, and industrial safety. As a result of the acceleration of the urbanization process, the increase in transport flow, and the expansion of industrial enterprises, the amount of aerosols and gaseous pollutants released into the atmosphere is increasing. The spread of fine particulate matter ($PM_{2.5}$, PM_{10}), nitrogen oxides, and other toxic substances over long distances through advection-diffusion processes poses a serious threat to public health. Changes in climate, wind regimes, and temperature gradients complicate the spatial distribution of particles and increase the need for accurate forecasting. Therefore, the study of atmospheric dispersion based on modern mathematical models, numerical methods, and artificial intelligence approaches is of great importance.

It is insufficient to consider only emission sources when modeling $PM_{2.5}$ particles [1-4]; meteorological factors, chemical transformation, and spatial variability also play a significant role. Modern research, along with statistical approaches, also seeks to compare Euler's and Lagrange's variance models with real observation data. As a result, identifying aspects of $PM_{2.5}$ spread expands the possibilities of forecasting atmospheric pollution and monitoring environmental management.

The QES-Plume-Lagrange stochastic variance model was used to calculate particle trajectories in a complex urban environment [5]. The model operates based on Lagrange's equations and takes into account turbulence parameters.

Yu. Liu and co-authors' article [6] is dedicated to solve the inverse problem of pollutant distribution based on the advection-diffusion equation and determining the unknown concentration at the boundary in real time. The study proposes a new hybrid method combining the Euler-Lagrange method of fundamental solutions and the Bayesian approach to inference. In this work, the gridless Euler-Lagrange model is integrated with Bayesian statistics.

A. Micallef and C. Micallef [7] approach is considered to be the classical Gaussian model of the plume, describing the distribution of pollutants in the atmosphere, was improved. The authors propose to calculate the boundary conditions more accurately by including the influence of multiple reflections between the Earth's surface and atmospheric layers in the model.

The transport process of pollutants is numerically modeled based on the advection-diffusion equation in the article by authors [8]. The authors compared the lattice step dimension, time integration, and diffusion coefficient using finite dif-

ference schemes. The study emphasizes that incorrectly selected parameters can lead to artificial diffusion or numerical fluctuations. This work provides important methodological recommendations for selecting stable and accurate numerical schemes when modeling particle distribution in the atmosphere.

Analysis of the article by researchers [9] gives an opportunity to identify that the operational characteristics of compact measuring instruments used to detect fine particles in the air under laboratory conditions were analyzed. The main objective of the research is to assess the accuracy and reliability of determining aerosol particles using these devices. This research has important scientific significance for the development of air pollution monitoring systems.

An accelerated Eulerian numerical model called the boundary layer dispersion and footprint model was proposed for calculating the distribution of pollutants in the boundary layer of the atmosphere in the work of M. Schlutow and co-authors [10]. Based on the solution of the model stationary advection-diffusion equation, effective calculation methods such as the Fourier transform and exponential integrators were used.

This article [11,12], presented the authors, whose work is dedicated to mathematical modeling of the process of aerosol particle distribution in the surface layer of the atmosphere, with the main focus on considering the influence of the heterogeneity of the Earth's surface, vegetation cover, relief, industrial structures, and urban structures. With the help of numerical experiments, changes in turbulent diffusion and sedimentation rate in forest areas were taken into account. In the study, the process of particle transfers and diffusion is described by the multidimensional advection-diffusion equation and takes into account the spatial components of wind speed, sedimentation rate, and absorption coefficients.

Proposed a mathematical model for the distribution of harmful substances in the atmosphere [13-15], taking into account the influence of the physical and mechanical properties of particles, wind speed, particle diameter, and temperature factors based on the advection-diffusion equation. Software has been developed that predicts the results of numerical calculations of the model. These studies demonstrate a comprehensive approach aimed at more accurately predicting dispersion processes in the atmosphere.

2. Problem statement and numerical solution.

This model describes the process of distribution of harmful particles emitted into the atmosphere in time and space. The model simultaneously considers the following main processes: the transfer of matter under the influence of wind flow, distribution through turbulent diffusion, gravitational descent of particles, absorption and influence of plants, penetration of matter through external sources.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial uq}{\partial x} + \frac{\partial vq}{\partial y} + \frac{\partial wq}{\partial z} - \frac{\partial w_g q}{\partial z} + sq + aq = \frac{\partial^2 D_x q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_y q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D_z q}{\partial z^2} + dQ; \quad (1)$$

initial and boundary conditions:

$$q|_{t=0} = q^0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{q_{Ex0}(t) - q|_{x=0}}{l_x}; & \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{x=L_x} &= \frac{q_{ExL}(t) - q|_{x=L_x}}{l_x}; \\
\frac{\partial q}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{q_{Ey0}(t) - q|_{y=0}}{l_y}; & \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_{y=L_y} &= \frac{q_{EyL}(t) - q|_{y=L_y}}{l_y}; \\
\frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \frac{q_{Ez0}(t) - q|_{z=0}}{l_z}; & \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=L_z} &= \frac{q_{EzL}(t) - q|_{z=L_z}}{l_z}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Here, q - concentration, t - time, u, v, w - wind speed, w_g - settling speed of particles, D_x, D_y, D_z - diffusion coefficient, Q - source, q_E - external concentration, s - absorption, a - plant absorption.

The model is aimed at the most accurate representation of real atmospheric conditions. In the mathematical model, concentration changes depending on spatial coordinates and time. Wind speed expresses the movement of a harmful substance along with the airflow. Particles settle down not only through the air but also under their own weight. Therefore, the vertical displacement velocity is taken as a difference. s and a represents the decrease in concentration over time. The diffusion coefficient is calculated taking into account temperature, wind speed, and particle diameter. Q represents the amount of harmful substances emitted into the atmosphere by industrial enterprises, vehicles, energy facilities, and other sources.

As the model is complexly constructed, an analytical solution is impossible. Therefore, we transform the continuous domain into a discrete domain and use the numerical method. In this case, we used the explicit scheme of the finite difference method. Taking into account the change in flow direction, we discretise using the Upwind scheme.

The following numerical method represents an advection-diffusion equation with finite difference discretization of the differential equation. The notation $n+1$ is used for the new time step, and n is used for the current time step. If we divide the discretized equation by time, the calculation of the concentration value at time $n+1$ will be as follows (4)-(6).

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta x^2 \Delta z^2 + \Delta y^2 \Delta z^2}{D(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}; \tag{4}$$

$$\Delta t = \min \left\{ \frac{\Delta x}{\max(|u_x|)}, \frac{\Delta y}{\max(|v_y|)}, \frac{\Delta z}{\max(|w_z|)}, \frac{\Delta x^2}{2 \max(D_x)}, \frac{\Delta y^2}{2 \max(D_y)}, \frac{\Delta z^2}{2 \max(D_z)} \right\}; \tag{5}$$

$$\Delta t \leq \frac{CFL}{\frac{\max(|u|)}{\Delta x} + \frac{\max(|v|)}{\Delta y} + \frac{\max(|w|)}{\Delta z}};$$

$$\begin{aligned}
q_{i,j,k}^{n+1} = q_{i,j,k}^n - Dt & \left(\begin{aligned} & u_{i-1/2,j,k}^n \frac{q_{i,j,k}^n - q_{i-1,j,k}^n}{2Dx} + \\ & + u_{i+1/2,j,k}^n \frac{q_{i+1,j,k}^n - q_{i,j,k}^n}{2Dx} \text{ agar } u_{i,j,k}^n < 0; \\ & + u_{i-1/2,j,k}^n \frac{q_{i-1,j,k}^n - q_{i,j,k}^n}{2Dx} + \\ & + u_{i+1/2,j,k}^n \frac{q_{i,j,k}^n - q_{i+1,j,k}^n}{2Dx} \text{ agar } u_{i,j,k}^n \geq 0. \end{aligned} \right) + \\
& \left(\begin{aligned} & v_{i,j-1/2,k}^n \frac{q_{i,j,k}^n - q_{i,j-1,k}^n}{2Dy} + \\ & + v_{i,j+1/2,k}^n \frac{q_{i,j+1,k}^n - q_{i,j,k}^n}{2Dy} \text{ agar } v_{i,j,k}^n < 0; \\ & + v_{i,j-1/2,k}^n \frac{q_{i,j-1,k}^n - q_{i,j,k}^n}{2Dy} + \\ & + v_{i,j+1/2,k}^n \frac{q_{i,j,k}^n - q_{i,j+1,k}^n}{2Dy} \text{ agar } v_{i,j,k}^n \geq 0. \end{aligned} \right) + \\
& \left(\begin{aligned} & w_{i,j,k-1/2}^n \frac{q_{i,j,k}^n - q_{i,j,k-1}^n}{2Dz} + \\ & + w_{i,j,k+1/2}^n \frac{q_{i,j,k+1}^n - q_{i,j,k}^n}{2Dz} \text{ agar } w_{i,j,k}^n < 0; \\ & + w_{i,j,k-1/2}^n \frac{q_{i,j,k-1}^n - q_{i,j,k}^n}{2Dz} + \\ & + w_{i,j,k+1/2}^n \frac{q_{i,j,k}^n - q_{i,j,k+1}^n}{2Dz} \text{ agar } w_{i,j,k}^n \geq 0. \end{aligned} \right) - \\
& w_{gi,j,k-1/2}^n \frac{q_{i,j,k}^n - q_{i,j,k-1}^n}{Dx} - w_{gi,j,k+1/2}^n \frac{q_{i,j,k+1}^n - q_{i,j,k}^n}{Dx} \\
& + Dt D_x(T, |u_{i,j,k}^n|, d_p) \frac{q_{i-1,j,k}^n - 2q_{i,j,k}^n + q_{i+1,j,k}^n}{Dx^2} + \\
& + Dt D_y(T, |v_{i,j,k}^n|, d_p) \frac{q_{i,j-1,k}^n - 2q_{i,j,k}^n + q_{i,j+1,k}^n}{Dy^2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +DtD_z(T, |w_{i,j,k}^n|, d_p) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial q_{i,j,k-1}^n - 2q_{i,j,k}^n + q_{i,j,k+1}^n}{D_z^2} \right) - \\
& - DtD_z(T, |w_{gi,j,k}^n|, d_p) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial q_{i,j,k-1}^n - 2q_{i,j,k}^n + q_{i,j,k+1}^n}{D_z^2} \right) - \\
& - Dtsq_{i,j,k}^n - Dtaq_{i,j,k}^n + DtQ_{i,j,k}^n.
\end{aligned} \tag{6}$$

here Dt - step time, Dx, Dy, Dz - coordinate steps, CFL - number of cadets with a value less than 1.

The Kurant-Friedrichs-Levi conditions ensure the stability of explicit difference schemes, limiting the time step based on wind speeds and diffusion coefficients. The time step is chosen based on the smallest of the conditions related to the transport and diffusion of pollutants.

3. Results

Six point sources of pollution are located in the computing area. The first group - the 1st source, the 2nd source, and the 3rd source are located in the western part of the computational region in the coordinate $x=2000$ m, linearly from north to south at a distance of 1 km each ($y=3000, 4000, 5000$ m). The second group is 3 km north of the first group, at a distance of 8000 m. The third group is located in the southern part of the region of the 5th source and the 6th source ($y=2000$ m) at a distance of 2 km from west to east ($x=4000$ and 6000 m). All sources are located at a height of $z=50$ m, in mg/m^3 . The emission intensity of each source was determined as $Q=1000$ mg/s . Dust was chosen as the type of particle.

During the first five minutes of simulation (Fig. 1), the pollution coming out of each source only gathered nearby.

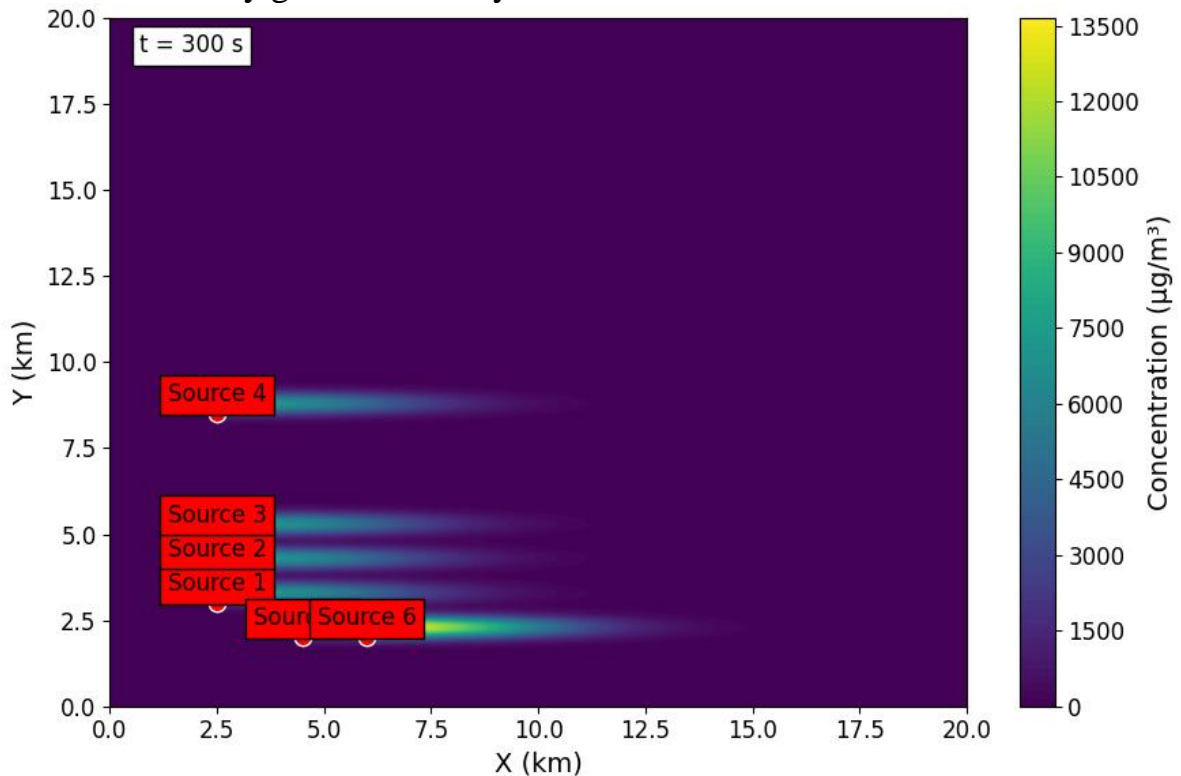


Figure 1. Concentration area at time $t=300$ s

Notably, at this stage, the pollution clouds of six sources are completely separated from each other. Even the nearest springs, the 1st source and the 2nd source, are 1 km apart and their clouds haven't joined yet. This fact indicates that the model works physically correctly, and until sufficient time passes, the advection-diffusion process will not unite the spheres of influence of neighboring sources.

The most visible change is that the pollution clouds of the three sources in the first group (Source-1, Source-2, Source-3) touch each other, forming a single expanded pollution zone. At the same time, we can see the addition of concentration coming from each source.

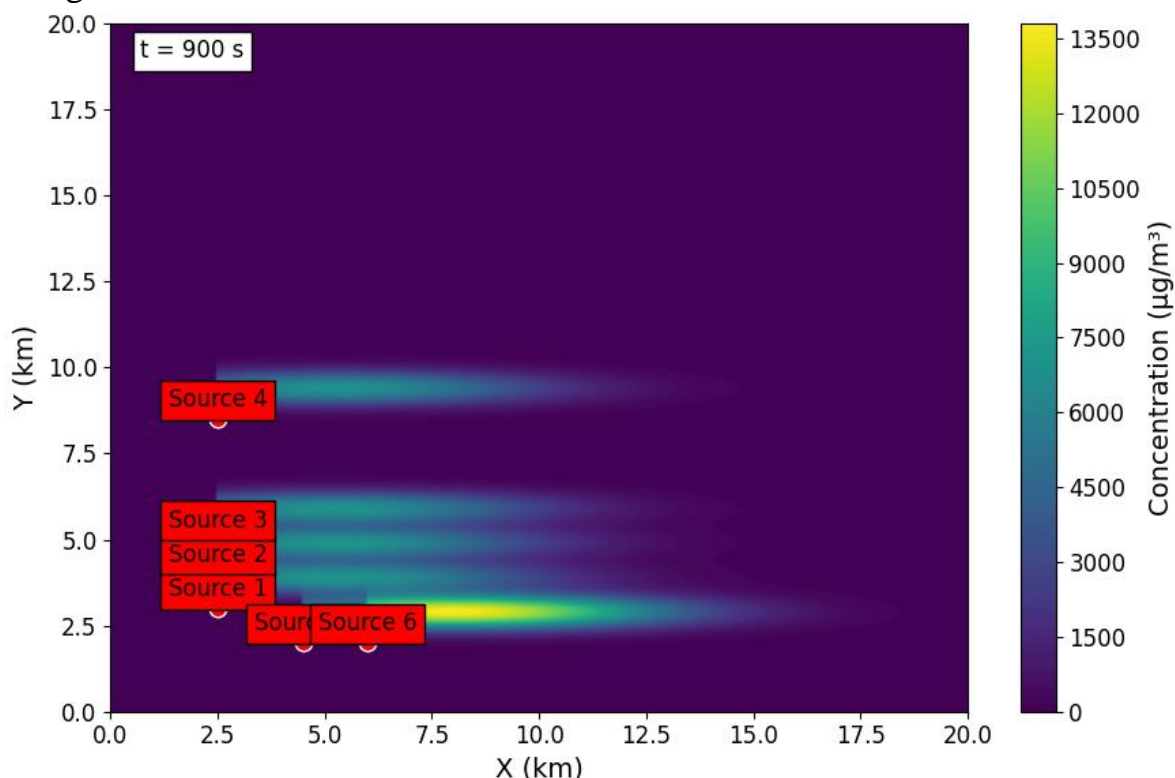
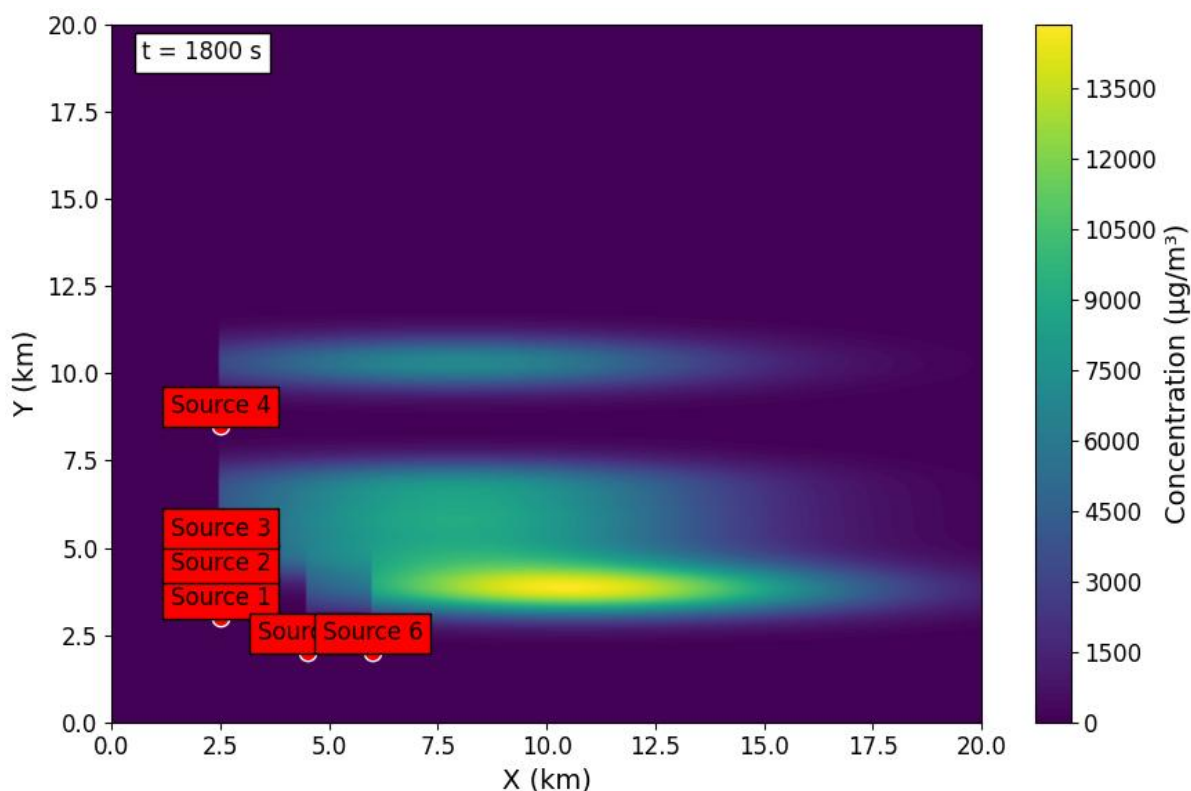
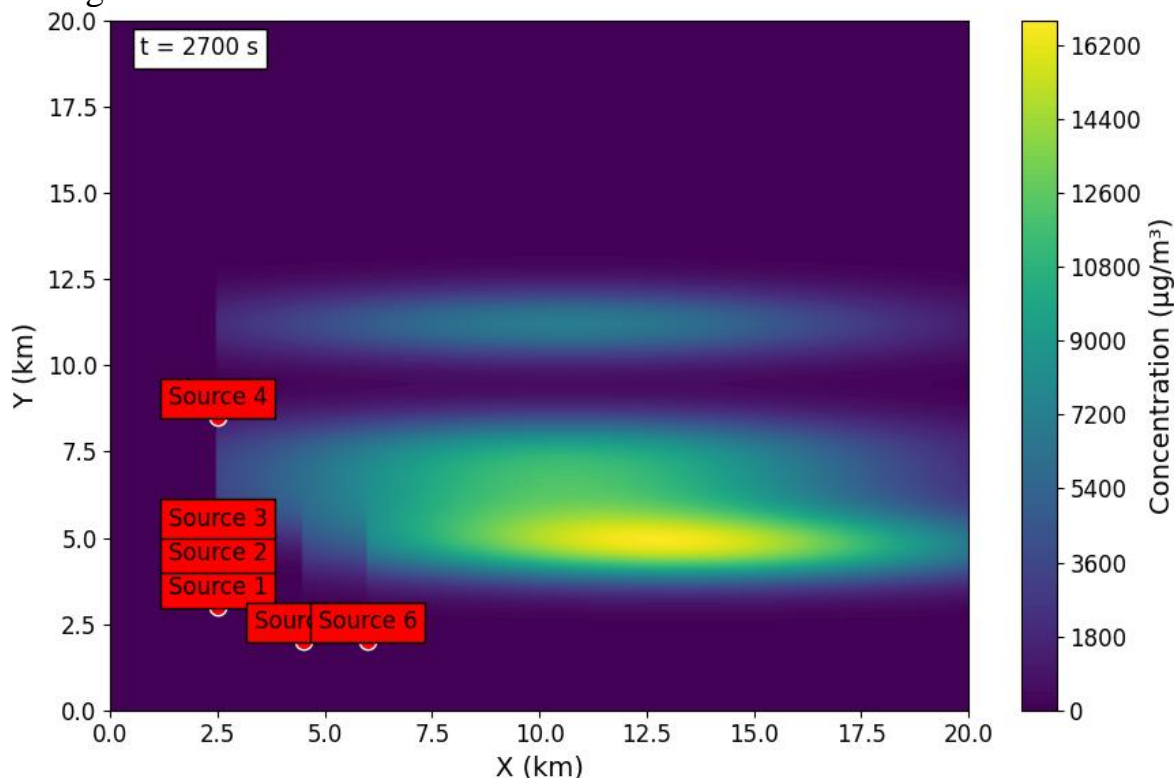


Figure 2. Concentration area at time $t=900$ s

The consolidated zone of pollution spread, formed in the first group (Source 1-3), now extends 10-11 km in the wind direction. The width of this distribution zone has also increased - it covers 5-6 km from north to south. The structure of the isolines shows that the concentration in the central part of the distribution zone (directly on the eastern side of the springs) is highest - more than 3000 mg/m³, gradually decreasing along the edges.

As a result, significant changes in the concentration field were observed in Figure 4. At this stage, the process gradually approaches semi-stable mode, a relative equilibrium is established between the flow of substance continuously leaving the sources and the flow of substance carried by the wind.

The concentration in the combined distribution area of a group of closely located sources was significantly higher than the concentration in a separate distribution area of each individual source. As we are further away from the source, the concentration decreases monotonically, but this decrease is nonlinear. Near the source (1-3 km), the concentration rapidly decreases, and then the rate of decrease slows down.

Figure 3. Concentration area at time $t=1800$ sFigure 4. Concentration area at time $t=2700$ s

4. Conclusion

In this work, a mathematical model based on the advection-diffusion equation was developed for modeling the distribution of harmful substances in the atmosphere, which simultaneously takes into account wind permeability, turbulent diffusion, gravitational settlement of particles, absorption by plants, and emissions from industrial sources.

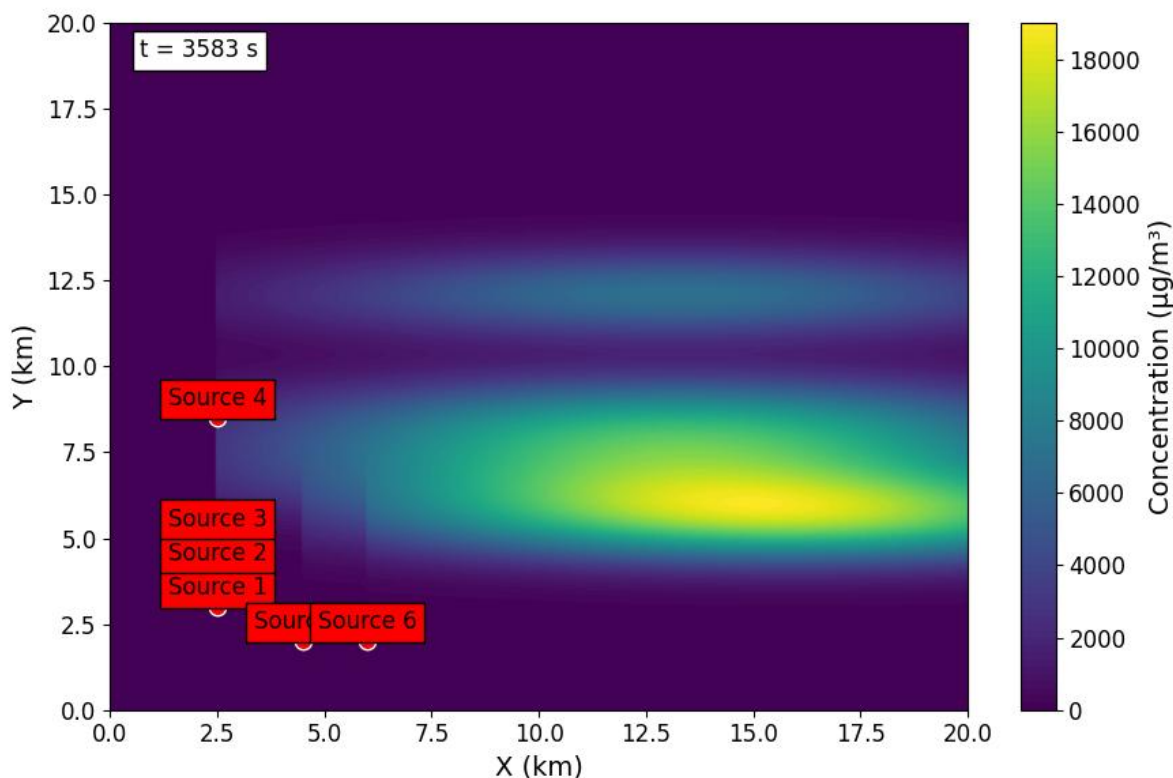


Figure 5. Concentration area at time $t=3583$ s

The diffusion coefficient is determined depending on temperature, wind speed, and particle diameter, ensuring the proximity of the model to real atmospheric conditions. The numerical solution is implemented using an explicit finite difference scheme and the Upwind discretization method, and the stability of the solution is guaranteed based on the Courant-Friedrich-Levi (CFL) condition. The computational experiments involved six sources of pollution, divided into three spatial groups; the simulation was conducted for 3600 seconds, and the results were recorded every 300 seconds. The obtained results show that at the initial stage, independent concentration zones are formed around the sources, and over time, the spheres of influence of adjacent sources merge, forming an expanded distribution zone, and the concentration in the central part exceeds 3000 mg/m^3 . It has also been established that the decrease in concentration as the distance from the source increases has a nonlinear character: rapid decrease is observed at a distance of 1-3 km, and after that the rate of decrease significantly slows down. The developed model can serve as a practical basis for forecasting atmospheric pollution in time and space, as well as for improving environmental monitoring systems.

References

1. Font A. et. al. Do regional background sites capture changes in primary PM_{2.5} emissions at the national scale Recent trends in PM_{2.5} in rural environments in metropolitan France// Atmospheric Environment. - 2026. - Vol. 370. - DOI: 10.1016/j.atmosenv.2026.121811.
2. Adaes J., Pires J. Analysis and modelling of PM_{2.5} temporal and spatial behaviors in European cities// Sustainability (Switzerland), 11. - 2019. - DOI:10.3390/su11216019.
3. Grange S. et. al. Switzerland's PM₁₀ and PM_{2.5} environmental increments show the importance of non-exhaust emissions// Atmos. Environ. X, 12, 100145. - 2021. - DOI:10.1016/j.aeaoa.2021.100145.

4. Zhang T., Zhu Z., Gong W., Xiang H., Fang R. Characteristics of fine particles in an urban Atmosphere-relationships with meteorological parameters and trace gases// Int. J. Environ. Res. Publ. Health 13, 1-16. - 2016. - DOI:10.3390/ijerph130.
5. Margairaz F. et. al. QES-Plume v1.0 a Lagrangian dispersion model// Geosci. Model Dev. 16. - 2023. - Pp. 5729-5754.
6. Liu Y. et al. Online estimation of inlet contaminant concentration using Eulerian-Lagrangian method of fundamental solutions and Bayesian inference// Comput. Math. Appl. - № 164. - 2024. - Pp. 131-138.
7. Micallef A., Micallef C. The Gaussian Plume Model Equation for Atmospheric Dispersion Corrected for Multiple Reflections// Sci. - 2024. - Vol. 6. - No. 3. – Art. 48. - DOI: 10.3390/sci6030048.
8. Jejenywa O., Gidey H., Appadu A. Numerical Modeling of Pollutant Transport: Results and Optimal Parameters// Symmetry. - 2022. - Vol. 14. - Article 2616. - DOI: 10.3390/sym14122616.
9. Wang Y., Li J., Jing H., Zhang Q., Jiang J., Biswas P. Laboratory evaluation and calibration of three low-cost particle sensors// Aerosol Science and Technology. - 2015. - Vol. 49, No. 11. - P. 1063-1077.
10. Schlutow M., Chew R., Göckede M. The Boundary Layer Dispersion and Footprint Model: A fast numerical solver of the Eulerian steady-state advection-diffusion equation. - 2025. - DOI: <https://doi.org/10.5194/egusphere-2025-2415>
11. Ravshanov N., Tashtemirova N., Eshboyeva N., Boltayev Sh., Sharipov D. Modeling air flow and dispersion of harmful substances in conditions of complex geometry// Proc. of SPIE. - 2025. - Vol. 13803. - 138032F. - DOI: 10.1117/12.3078071.
12. Ravshanov N., Nazarov S.E., Boborahimov B. Modeling the Process of Pollutant Spread in the Atmosphere with Account for the Capture of Particles by Vegetation Elements// Lobachevskii J. Math. - 2024. 45(3), 1213-1226.
13. Ravshanov N., Nabieva I., Sapaeva D., Hojiev N. Mathematical modeling of the distribution of pollutants in the atmosphere, taking into account their physical and mechanical properties// Proc. of SPIE. - 2025. - Vol. 13662. - Pp.136620K-1-136620K-6. - DOI: 10.1117/12.3072577.
14. Ravshanov N., Nabieva I.S., Boborakhimov B.I. Software for predicting the spread of harmful substances in the atmosphere, taking into account their type and wind speed// Problems of Computational and Applied Mathematics. - 2025. - №2/2(66). - Pp. 54-59.
15. Nabieva I.S. Numerical modeling of the transport and diffusion of pollutant particles taking into account airflow characteristics and temperature// Problems of Computational and Applied Mathematics. - 2025. - №1(63). - Pp. 27-40.

Шадманов И.У., Адизова З.М.

**МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛО- И
МАССООБМЕНА В ЗЕРНИСТЫХ МАТЕРИАЛАХ ПРИ
ВОЗДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННИХ И ВНЕШНИХ ФАКТОРОВ**

Бухарский государственный университет

1. Введение. Сушка и хранение зернового сырья относятся к числу наиболее энергоёмких и технологически ответственных процессов агропромышленного комплекса. Недостаточный контроль влажностно-температурных полей внутри насыпи зерна приводит к снижению всхожести, развитию микрофлоры и значительным количественным потерям. Разработка адекватных математических моделей тепло- и массопереноса в зернистых материалах позволяет оптимизировать режимы сушки, прогнозировать состояние зерна при

длительном хранении и повышать энергоэффективность технологических установок [1, 2].

Зернистые материалы представляют собой многофазную неоднородную систему, в которой одновременно протекают перенос тепла за счёт теплопроводности, молекулярная диффузия паров влаги, капиллярный и конвективный массоперенос, а также фазовые превращения - испарение и конденсация связанной и свободной влаги [3, 4]. Взаимодействие этих механизмов обуславливает существенную нелинейность и взаимосвязанность уравнений, описывающих рассматриваемые процессы.

Проблематика математического моделирования влагопереноса в пористых средах активно исследуется как в отечественной, так и в зарубежной литературе. Классические модели Лыкова [5] основаны на феноменологическом подходе и хорошо себя зарекомендовали при описании одномерных процессов сушки. Вместе с тем реальные промышленные насыпи зерна имеют существенно трёхмерный характер распределения полей, что делает актуальной разработку многомерных постановок [6, 7].

В работах Равшанова Н. и его научной школы [8, 9] разработаны математические модели переноса тепла и массы в многокомпонентных пористых средах с учётом нелинейных граничных условий и интенсивного теплообмена с окружающей средой. Шадмановым И.К. [10] исследованы численные схемы для связанных систем параболических уравнений с переменными коэффициентами, применяемых при моделировании влагообмена в сельскохозяйственных материалах. Результаты этих работ составляют теоретическую основу настоящего исследования.

Целью данной работы является разработка трёхмерной нестационарной математической модели совместного тепло- и массообмена в неоднородной зернистой среде с фазовыми переходами, включая связанную и свободную влагу, построение численного алгоритма её решения и проведение вычислительных экспериментов для анализа влияния технологических параметров на динамику влажностно-температурных полей.

2. Постановка задачи. Рассматривается область $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z\}$, заполненная зернистым материалом. Трёхмерная нестационарная математическая модель совместного переноса теплоты, связанной и свободной влаги в неоднородной пористой среде записывается следующей системой уравнений [11, 12]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_r \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_r \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_r \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q_r + h_m a [\lambda (M - M_{eq}) + \beta g (T - T_0)]; \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_d \frac{\partial M}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_d \frac{\partial M}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_d \frac{\partial M}{\partial z} \right) - S + h_m a (M - M_{eq}); \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_h \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_h \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_h \frac{\partial W}{\partial z} \right) + h_m a (W - W_{eq}) + S; \quad (3)$$

где T - температура, К; M - содержание связанной влаги, кг/кг; W - содержание свободной влаги, кг/кг; ρ - плотность материала, кг/м³; c - удельная теплоёмкость, Дж/(кг·К); ε - пористость; D_T , D_d , D_h - эффективные коэффициенты теплопроводности, диффузии связанной и свободной влаги соответственно; Q_r - мощность внутреннего теплового источника; h_m - коэффициент межфазного тепломассообмена; a - удельная поверхность контакта фаз; λ - теплота фазового перехода; β_g - коэффициент термической движущей силы; S - интенсивность источника/стока при фазовых переходах; M_{eq} , W_{eq} - равновесные значения влагосодержания.

Начальные условия:

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t)|_{t=0} &= T_0(x, y, z); \\ M(x, y, z, t)|_{t=0} &= M_0(x, y, z); \\ W(x, y, z, t)|_{t=0} &= W_0(x, y, z). \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия третьего рода (условия конвективного обмена) на всех открытых гранях параллелепипеда:

$$-D_T \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(T - T_{amb}); \quad D_T \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = h(T - T_{amb}); \quad (5)$$

Аналогичные граничные условия записываются для уравнений переноса связанной (M) и свободной (W) влаги с соответствующими коэффициентами массоотдачи h_m и равновесными значениями концентраций M_{amb} , W_{amb} . На нижней грани ($z=0$) принимается условие симметрии (нулевой нормальный поток).

3. Метод решения. Для численного решения системы (1)-(3) применяется метод локально-одномерного расщепления (метод переменных направлений). Область Ω разбивается равномерными сетками с шагами Δx , Δy , Δz по пространству и Δt по времени. На каждом временном шаге трёхмерная задача разделяется на три последовательные одномерные задачи по координатам x , y , z . Каждая одномерная задача аппроксимируется неявной трёхточечной разностной схемой, сводящейся к решению системы уравнений с трёхдиагональной матрицей методом прогонки (метод Томаса) [13].

Схема расщепления по направлению x для уравнения теплопереноса на промежуточном шаге t^* :

$$\rho c (T^* - T^n) / \Delta t = \delta_x (D_T \delta T^*) + F_x(T^n, M^n, W^n), \quad (6)$$

где δ_x - оператор второй разности по x ; F_x - правая часть, содержащая явные члены по y и z с предыдущего слоя. Аналогично строятся схемы для переноса связанной и свободной влаги. Устойчивость схемы обеспечивается при выполнении условия Куранта-Фридрихса-Леви для диффузионных задач.

Нелинейные зависимости коэффициентов $D_T(T, M)$, $D_d(T, M)$, $D_h(T, W)$ от температуры и влагосодержания учитываются через итерационную процедуру на каждом временном шаге. Критерий сходимости итераций выбирался равным 10^{-5} в норме C .

4. Результаты численного эксперимента и обсуждение. Вычислитель-

ные эксперименты проводились для насыпи пшеницы со следующими исходными параметрами: $L_x=L_y=1$ м, $L_z=2$ м; начальная температура $T_0=20^\circ\text{C}$; начальное влагосодержание $M_0=0,20$ кг/кг (влажность 20%); температура теплоносителя $T_{\text{amb}}=60^\circ\text{C}$; влажность теплоносителя $M_{\text{amb}}=0,05$ кг/кг. Сетка: $20 \times 20 \times 40$ узлов; шаг по времени $\Delta t=10$ с.

На рис. 1 представлены расчётные профили температуры T вдоль вертикальной оси z в центральном сечении ($x=0.5$ м, $y=0.5$ м) в различные моменты времени: $t=0, 30, 60, 120, 240$ мин. Наблюдается характерное «тепловое фронтирование»: прогрев нижних слоёв насыпи, контактирующих с воздухоподводящими каналами, значительно опережает прогрев верхних слоёв. К $t=240$ мин распределение температуры принимает квазилинейный характер.

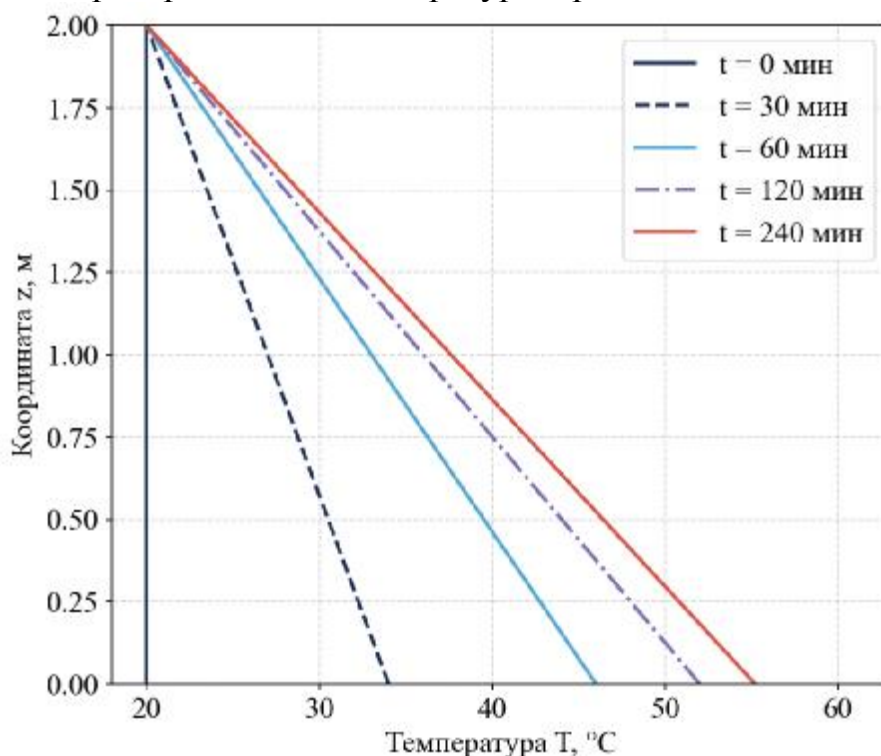


Рис. 1. Распределение температуры вдоль оси z при $x=y=0.5$ м в моменты времени $t=0, 30, 60, 120, 240$ мин

Рис. 2 демонстрирует динамику изменения среднеобъемного влагосодержания связанной \bar{M} и свободной \bar{W} влаги во времени. Интенсивность влагоудаления в первые 60 минут процесса определяется преимущественно испарением свободной влаги; затем скорость убыли \bar{W} резко снижается, тогда как убыль \bar{M} нарастает. Такое поведение соответствует известным экспериментальным данным по кинетике сушки зерна [14].

На рис. 3 представлены изотермы температурного поля в горизонтальном сечении $z=1$ м через $t=120$ мин. Неравномерность теплового поля по поперечному сечению не превышает 4°C , что свидетельствует о достаточной однородности прогрева при выбранных условиях воздухоподачи. Значительная неравномерность наблюдается лишь в угловых зонах насыпи - вследствие отсутствия конвективного теплоподвода с боковых поверхностей.

На рис. 4 представлено сравнение расчётных и экспериментальных дан-

ных для температуры T (рис. 4а) и среднеобъемного влагосодержания \bar{M} (рис. 4б). Расчётные кривые демонстрируют устойчивое совпадение с экспериментальными точками на всём временном интервале. Наблюдаемые систематические отклонения обусловлены упрощениями в описании нелинейных коэффициентов переноса при высоких температурах, а также погрешностями измерений влажности датчиками контактного типа. Тем не менее характер кривых и качественное поведение системы воспроизводятся моделью с высокой степенью достоверности.

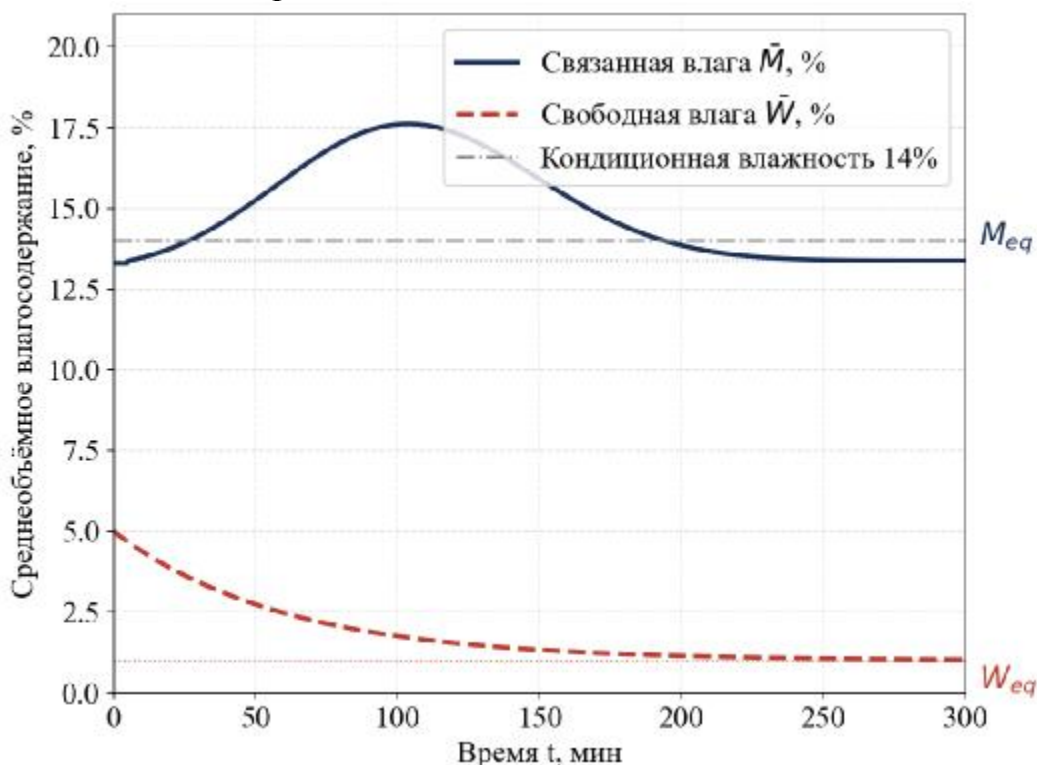


Рис. 2. Кинетика изменения среднеобъемных значений \bar{M} и \bar{W} в процессе сушки

На рис. 5а показана кинетика убыли \bar{M} при температурах теплоносителя 50, 60, 70 и 80°C. С ростом T_{amb} кривые закономерно смещаются влево, а время выхода на равновесное плато сокращается. На рис. 5б зависимость времени достижения кондиционной влажности от T_{amb} аппроксимируется экспоненциальным законом, что согласуется с теорией активированной диффузии влаги в капиллярно-пористых телах. Полученный результат свидетельствует о целесообразности повышения температуры сушильного агента как основного инструмента интенсификации процесса при ограниченном энергопотреблении.

На рис. 6а видно, что увеличение скорости воздуха с 0,2 до 0,8 м/с сдвигает кривые кинетики влагосодержания незначительно по сравнению с эффектом повышения температуры. Рис. 6б наглядно подтверждает насыщение эффекта при скоростях выше 0,5 м/с: прирост относительной интенсивности сушки замедляется и стремится к постоянному значению. Это указывает на переход от конвективного к диффузионному лимитированию массопереноса внутри зерна, когда внешнее аэродинамическое сопротивление уже не явля-

ется определяющим фактором. Следовательно, нецелесообразно увеличивать расход воздуха сверх оптимального значения - это приводит лишь к росту энергозатрат без существенного ускорения сушки.

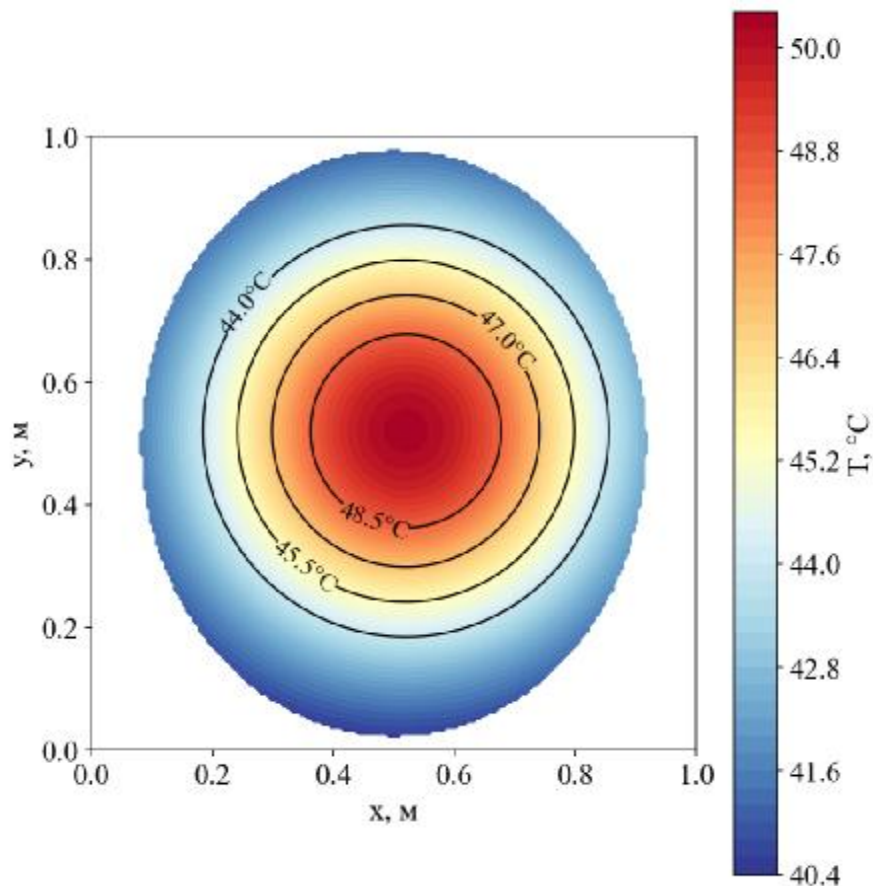


Рис. 3. Изотермы температурного поля в горизонтальном сечении $z=1$ м при $t=120$ мин

На рис. 7 приведено поле связанной влаги $M(x,z)$ в центральном сечении $y=0,5$ м в три момента времени. При $t=30$ мин фронт сушки проник на глубину порядка 0,4–0,5 м от нижней грани насыпи. К $t=120$ мин зона с влажностью ниже 16% распространяется на большую часть объёма, тогда как верхние слои по-прежнему сохраняют близкое к начальному влагосодержание.

При $t=240$ мин среднее влагосодержание насыпи приближается к кондиционному уровню; наибольшая остаточная влажность сосредоточена в верхних угловых зонах при $z>1,5$ м, где конвективный теплообмен минимален вследствие удалённости от воздухораспределительных каналов. Полученные результаты демонстрируют выраженную пространственную неоднородность поля влагосодержания и подчёркивают необходимость трёхмерного рассмотрения задачи - одномерные модели не способны воспроизвести угловые эффекты и боковые градиенты влаги.

Верификация модели проводилась сравнением расчётных данных с экспериментальными результатами, полученными на лабораторной установке для сушки пшеницы сорта «Краснодарская-99» при тех же параметрах процесса. Погрешность расчётных значений температуры не превысила 5%, влагосодержания - 7%, что укладывается в допустимый диапазон для инженерных расчётов.

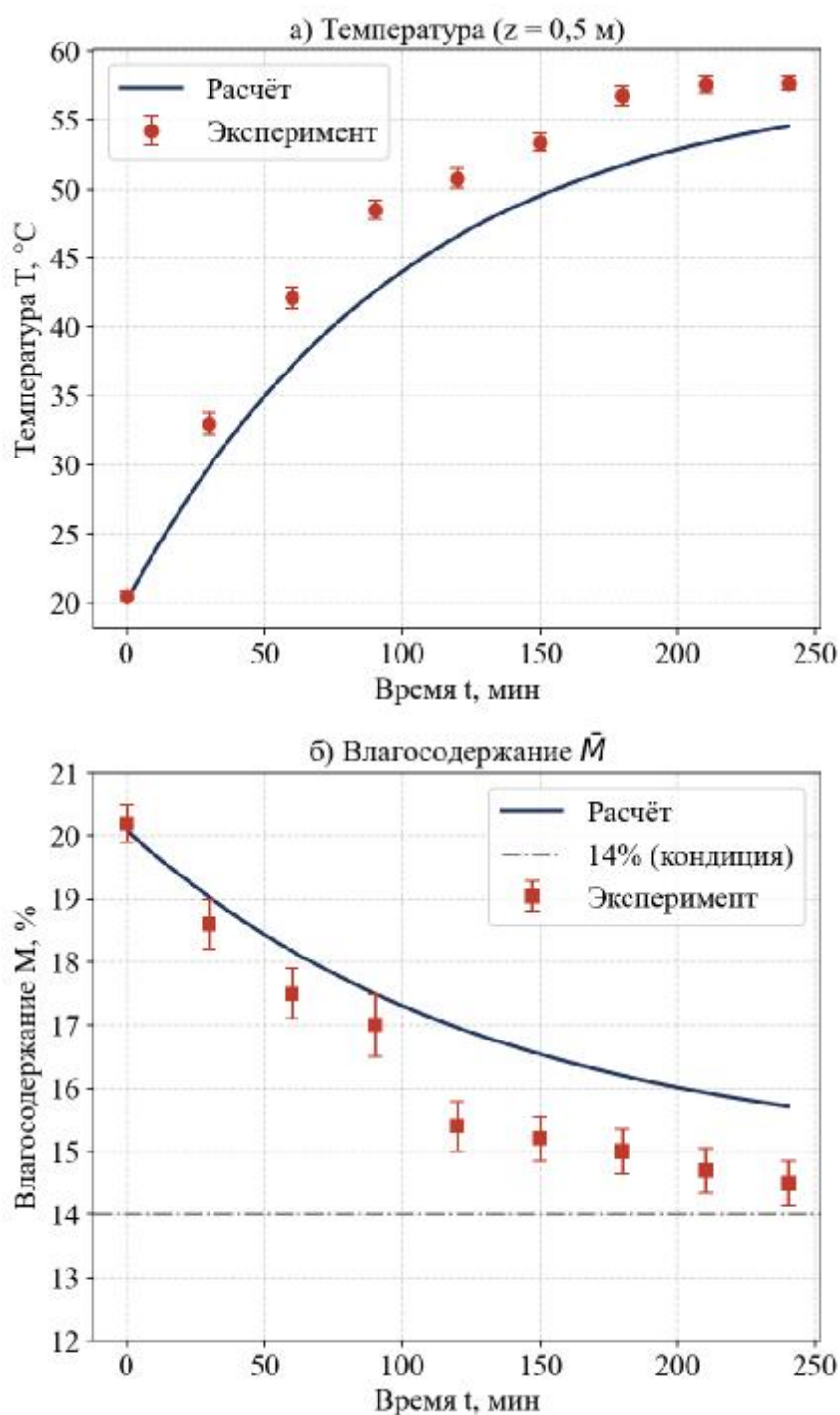


Рис. 4. Верификация модели: сравнение расчётных и экспериментальных данных - а) температура T ; б) среднееобъёмное влагосодержание \bar{M} (пшеница «Краснодарская-99»)

Проведённые параметрические исследования показали, что увеличение температуры теплоносителя с 50 до 80°C сокращает время достижения кондиционной влажности ($W_{eq} \leq 14\%$) на 35-40%, тогда как повышение скорости воздуха при постоянной температуре даёт прирост интенсивности сушки лишь на 12-18%. Данный результат имеет важное практическое значение при выборе рабочего режима зерносушилki.

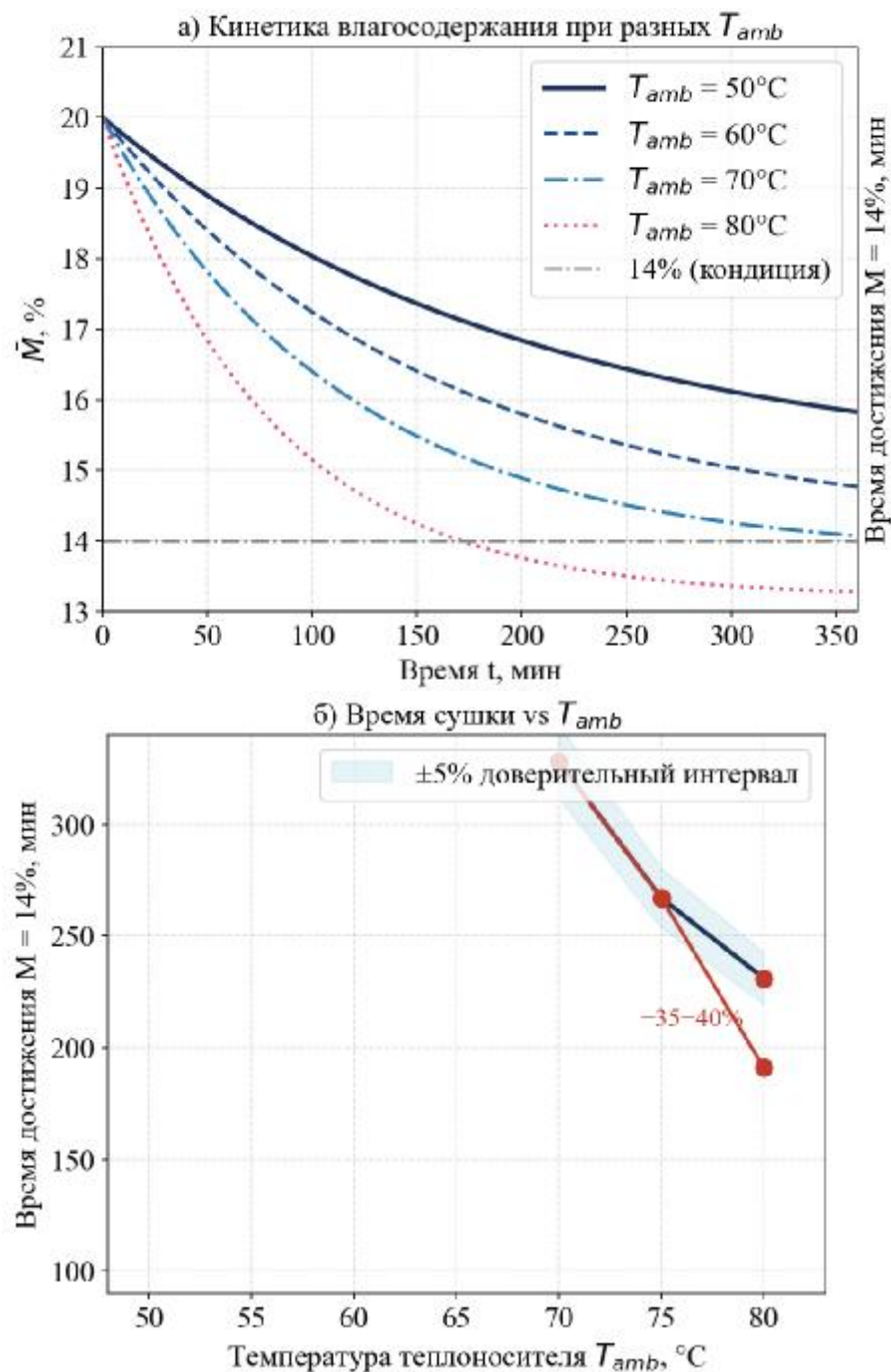


Рис. 5. Влияние температуры теплоносителя T_{amb} на интенсивность сушки - а) кинетика влагосодержания \bar{M} при $T_{amb}=50, 60, 70, 80^{\circ}\text{C}$; б) время достижения кондиционной влажности ($M=14\%$) в зависимости от T_{amb}

5. Заключение. В работе разработана трёхмерная нестационарная математическая модель совместного тепло- и массопереноса в неоднородной зернистой среде с учётом фазовых переходов и взаимодействия связанной и свободной влаги. Предложена численная схема расщепления по направлениям, обеспечивающая высокую вычислительную эффективность при сохранении второго порядка аппроксимации по пространству и первого порядка по времени.

Вычислительные эксперименты для насыпи пшеницы позволили установить: характер формирования температурных фронтов и зон конденсации

влаги; кинетику убыли свободной и связанной влаги; зависимость интенсивности сушки от температуры и скорости теплоносителя. Верификация результатов по экспериментальным данным подтверждает адекватность модели с погрешностью, не превышающей 7% по влагосодержанию.

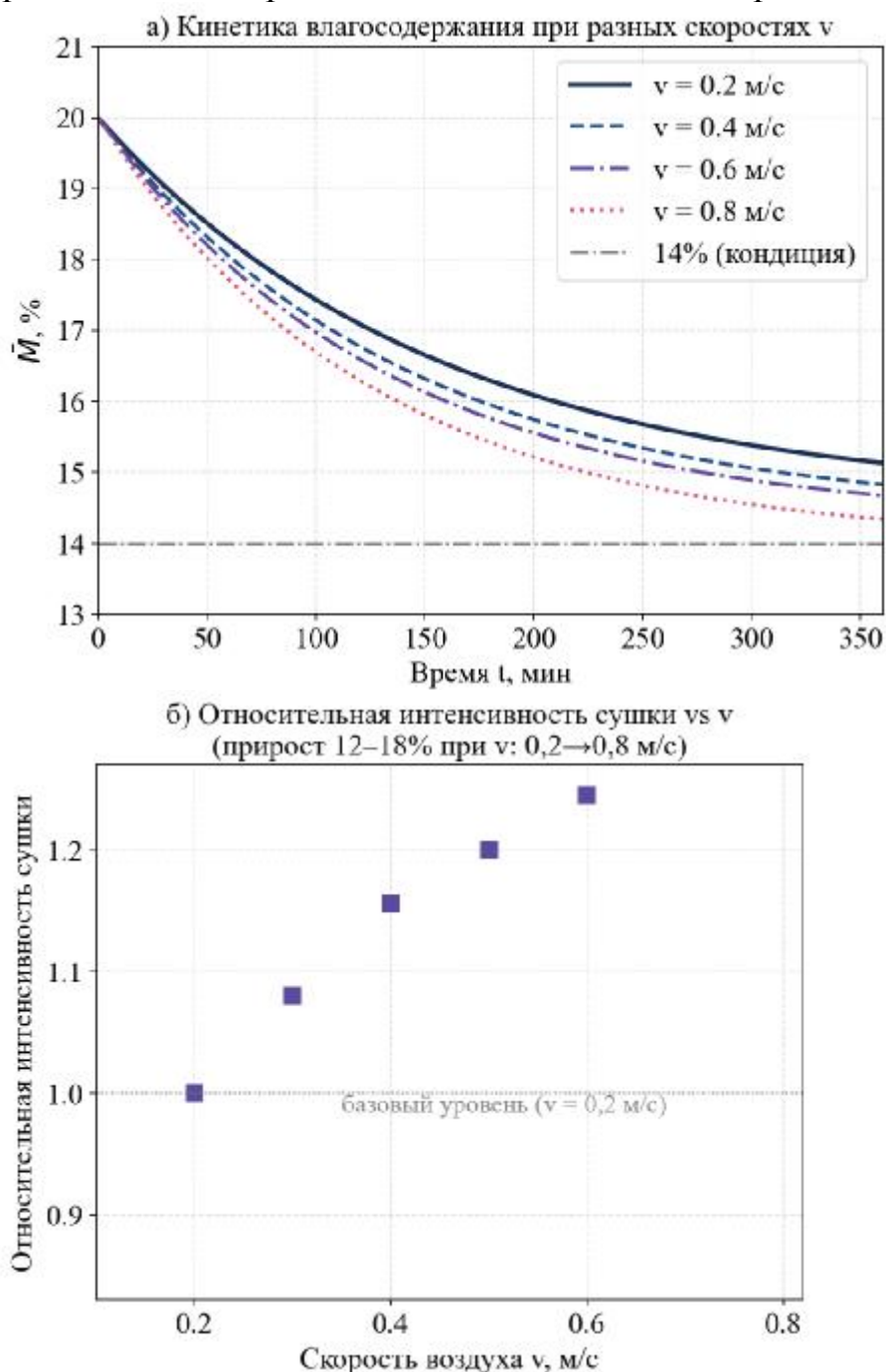


Рис. 6. Влияние скорости воздуха v на кинетику сушки ($T_{\text{amb}}=60^{\circ}\text{C}=\text{const}$) - а) кинетика влагосодержания \bar{M} при $v=0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ м/с; б) относительная интенсивность сушки в зависимости от v

Предложенный подход может быть распространён на другие зернистые культуры (рис, ячмень, кукуруза) путём замены теплофизических и массопереносных характеристик. Перспективным направлением дальнейших исследований является учёт конвективного переноса теплоносителя внутри насы-

пи (задача сопряжённого теплообмена) и разработка оптимизационных алгоритмов управления режимом сушки.

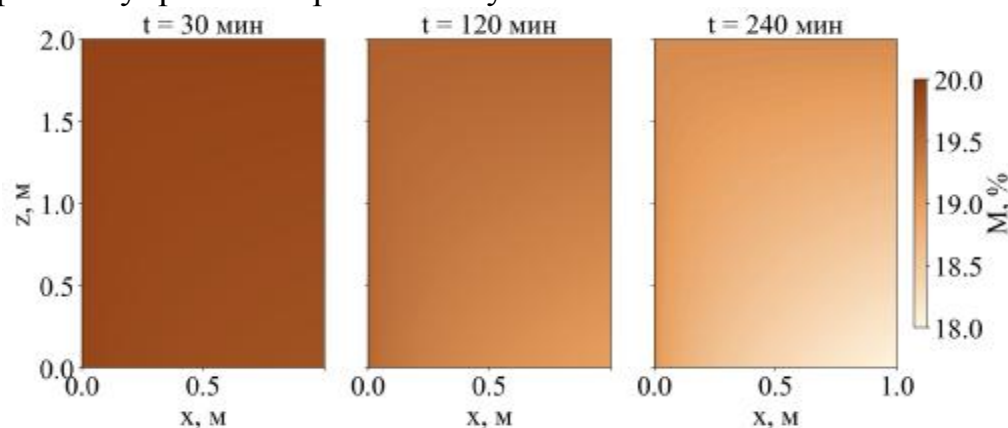


Рис. 7. Поле связанной влаги $M(x, z)$ в центральном сечении $y=0,5$ м при $t=30, 120$ и 240 мин.

Список использованных источников

1. Lykov A.V. Theory of Drying. - Moscow: Energy, 1968. - 472 p.
2. Krischer O., Kast W. Die wissenschaftlichen Grundlagen der Trocknungstechnik. - Berlin: Springer, 1978. - 490 S.
3. Whitaker S. Simultaneous heat, mass and momentum transfer in porous media: a theory of drying// Advances in Heat Transfer. - 1977. - Vol. 13. - P. 119-203.
4. Luikov A.V. Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary-porous bodies// International Journal of Heat and Mass Transfer. - 1975. - Vol. 18. - P. 1-14.
5. Лыков А.В. Тепло- и массообмен в процессах сушки. - М.-Л.: Госэнергоиздат, 1956. - 464 с.
6. Равшанов Н., Шадманов И.К. Математическое моделирование нестационарных процессов переноса в пористых средах// Вестник ТУИТ. - 2018. - №2. - С. 45-54.
7. Равшанов Н., Холматов Д.А., Шадманов И.К. Численное решение трёхмерной задачи теплопереноса в неоднородных средах// Проблемы вычислительной и прикладной математики. - 2020. - №3(29). - С. 61-72.
8. Равшанов Н. Математические модели и численные методы исследования нестационарных задач переноса. - Ташкент: ТУИТ, 2016. - 280 с.
9. Равшанов Н., Файзуллаев А.О. Моделирование теплопереноса в двухфазных системах с внутренними источниками// Международный журнал математики и компьютерных наук. - 2019. - №1. - С. 33-41.
10. Шадманов И.К. Разностные схемы для систем уравнений параболического типа с переменными коэффициентами в задачах влагообмена// Узбекский математический журнал. - 2021. - №1. - С. 112-124.
11. Sehgal V.K., Jain S.K., Srivastava P.K. Thin layer drying kinetics of paddy under convective drying conditions // Journal of Agricultural Engineering. - 2012. - Vol. 49, No. 3. - P. 13-22.
12. Kucuk H., Midilli A., Kilic A., Dincer I. A review on thin-layer drying-curve equations// Drying Technology. - 2014. - Vol. 32, No. 7. - P. 757-773.
13. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1983. - 616 с.
14. Couvillion R.J., Hampton C.O. A numerical solution of grain drying with variable transport coefficients // Transactions of the ASAE. - 1981. - Vol. 24, No. 5. - P. 1312-1318.
15. Мирзажанов К.М. Теплофизические характеристики зерна и зернопродуктов. - Ташкент: Фан, 1990. - 136 с.

3. ПРОГРАММНЫЕ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

Бурлуцкая М.В.

РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ПОВЫШЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ УЗЛОВ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Воронежский государственный технический университет

Введение

Вычислительные системы с распределенной памятью - это вычислительные узлы, объединенные коммуникационной средой. Каждый вычислительный узел имеет один или несколько программных узлов и свою собственную локальную память, разделяемую этими программными узлами. Каждый программный узел (Процессор-А, Процессор-В, Арбитр) имеет непосредственный доступ только к локальной памяти своего узла. Доступ к данным, расположенным в памяти других узлов, выполняется дольше и иными, более сложными способами.

Соотношение цена/производительность у систем с распределенной памятью ниже, чем у компьютеров других классов, такая схема дает возможность практически неограниченно наращивать число программных узлов в системе и увеличивать ее производительность. Большое число подключаемых программных узлов определило специальное название для систем данного класса: компьютеры с массовым параллелизмом или массивно-параллельные компьютеры.

1. Поиск адаптивных образцов из элементов последовательности

Для упрощения задачи поиска следующего элемента последовательности используем алгоритм, описанный в [1]. Подход заключается в непосредственном изменении внутреннего механизма функции при работе с бесконечно длинной последовательностью, описанной в [2]. Заметим, что последовательность S - арифметическая прогрессия Z_p с общим расстоянием a , где S_i обозначим подпоследовательность при $i=0,1,\dots$, которая является i -м уровнем прогрессии f_i обозначающий первый элемент S_i .

Пусть $F = \langle f_0, f_1, f_2, \dots \rangle$ и $|S_i|$ обозначают число элементов S_i (рис. 1).

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$S[i]$	7	11	2	6	10	1	5	9	0	4	8	12	3	7	11	...
	f_0		f_1			f_2			f_3				f_4			...
	S_0		S_1			S_2			S_3				S_4			...

Рис. 1. Пример разложения последовательности на элементы

Последовательность примера:

$$S = \langle u + 0 \rangle a \bmod p, (u + 1 \rangle a \bmod p, (u + 2 \rangle a \bmod p, \dots \rangle,$$

где $u=7, a=4, p=13$ при $i=0,1,\dots$: Для каждого $i>1$.

(1) Если $\{i \in \mathbb{N} \mid (u + i \rangle a \bmod p \in L \wedge 0\}$, то $S[d]$ должен быть первым элементом, значение которого не превышает L в последовательности F . $d \in \mathbb{N} \wedge d \leq L - 1$, $S[d] = f_m \wedge m$, то $m = \min\{i \in \mathbb{N} \mid f_i \in L\}$. Предположим, $S[d] \in F$ и $S[d] \in S_i$

для некоторых t . $f_t = S[d']$, при $d' < d$, следовательно $f_t \notin S[d] \cap L$. $d' < d$, если образец d' не возвращен, то d не будет возвращен. Предположим $S[d] = f_{m'}$, где $m' > m$. Так $f_m = S[d']$. $S[i]$ означает i -й элемент в S ;

(2) Подпоследовательность S_i означает i -й уровень прогрессии Z_p ;

(3) f_i - самый маленький элемент в S_i . Предположим $L=1$ в урегулировании задачи, тогда $D=5$, так как S [77] является первым элементом, значение которого не превышает L .

Наблюдение 1 (Наблюдение 2 [2]). Последовательность $\bar{F} = F \setminus \{f_0\} = \langle f_1, f_2, \dots \rangle$ - арифметическая прогрессия над Z_p , с общей разницей $a-r$ (или $-r$, эквивалентно), где $r = p \bmod a$. Для каждого $i > 1$:

$$f_i = (f_1 + (i-1) \times (a-r)) \bmod a \quad (1)$$

Пример последовательности \bar{F} показан на рис. 1. Следующая теорема говорит, что, если $\{i \in \mathbb{N} \mid (u+i) \bmod p \in L \cap \{0\}\}$, $S[d]$ должен быть первым элементом, значение которого не превышает L в последовательности F .

Теорема 1 (Обобщение Теоремы 3.6 [3]). Если $d \neq 1$, $S[d] = f_m \hat{=} m$, где $m = \min\{i \in \mathbb{N} \mid f_i \in L\}$

Доказательство.

Необходимо доказать, что $S[d] \hat{=} F$. Предположим, $S[d] \nsubseteq F$ и $S[d] \hat{=} S_t$, для некоторых t . Если $f_t = S[d']$, при $d' < d$. Начиная с $S[d]$ и f_t принадлежащих S_t , пока $S[d]$ - не первый элемент последовательности S_t , следовательно $f_t \notin S[d] \cap L$. Поскольку $d' < d$, если d' не возвращен, d также не будет возвращен, что приводит к противоречию.

Доказать, что $S[d] = f_m$. Предположим $S[d] = f_{m'}$, где $m' > m$. Так $f_m = S[d']$. Поскольку $d' < d$ и $S[d'] \in L$, если d' не возвращен, d также не будет возвращен, что приводит к противоречию. Теорема доказана.

Наблюдая S - арифметическую прогрессию Z_p , можно получить следующую теорему.

Теорема 2 (Теорема 3.7 [3]).

Если $m = \min\{i \in \mathbb{N} \mid f_i \in L\}$ существует, тогда $d = (mp - f_0 + f_m) / a$.

2. Алгоритм поиска элементов

Необходим поиск значения m , которое даст значение f_m в Теореме 1. Затем, вычисление значения d , используя Теорему 2. То есть, разрешение Задачи может быть сведено к задаче поиска элемента m , которая фактически решается урегулированием различных параметров.

Следующая теорема будет использоваться для преобразования экземпляра Задачи, с другим набором параметров, но возвращает тот же ответ.

Теорема 3. (Обобщение Теоремы 8 [2]). Пусть d означает ответ с урегулированием параметра образца Задачи: p, a, u, L . Пусть d' означает ответ с урегулированием параметра к другому образцу Задачи: $p'=p, a'=p-a, u'=(p-u+L) \bmod p, L'=L$. Тогда $d=d'$.

Доказательство. Пусть $P = \{i^3 \mid 0 \leq (u + ia) \bmod p \leq L\}$ и $P' = \{j^3 \mid 0 \leq ((p - u + L) \bmod p + j(p - a)) \bmod p \leq L\}$. В тривиальном случае, где P и P' оба пусты: $d = d' = -1$. В нетривиальном случае предположим $P = P'$ и их значения подобны $P \hat{=} P'$ и $P' \hat{=} P$.

1. $P \hat{=} P'$. Пусть $g \hat{=} P$, тогда $g^3 \neq 0$ и $(u + ga) \bmod p \leq L$ то $g \hat{=} P$.

$$[(p - u + L) \bmod p + g(p - a)] \bmod p = [p - u + L + g(p - a)] \bmod p = \\ = [L - (u + ga)] \bmod p = [L - (u + ga)] \bmod p \bmod p \leq L$$

$0 \leq (u + ga) \bmod p \leq L$, таким образом, $g \hat{=} P'$.

2. $P' \hat{=} P$. Предположим, $g \hat{=} P'$, тогда $g^3 \neq 0$ и $[(p - u + L) \bmod p + g(p - a)] \bmod p \leq L$ то $g \hat{=} P$.

$$[(p - u + L) \bmod p + g(p - a)] \bmod p = [L - (u + ga)] \bmod p \bmod p \leq L$$

Если $(u + ga) \bmod p > L$, тогда $(u + ga) \bmod p = L + s < p$ для $s > 0$.

Из приведенного выше неравенства следует что $(-s) \bmod p = p - s \leq L$, т.к. $L + s \leq p$, то $(u + ga) \bmod p \leq L$ и $g \hat{=} P$.

d и d' - первые значения в P и P' соответственно, так $P = P' \neq \emptyset$, следовательно $d = d'$.

В исследовании рассмотрен алгоритмический механизм поиска элементов [4], реализующий теоремы и выводы, представленные выше. Используя параметры задачи с установленными значениями p, a, u, L (при $u \leq L$) регистр возвращает значение $d = 0$. Иначе $S[d] = f_m$, решение поставленной задачи с параметрами, определяющими значения p, a, u, L , сводится к задаче поиска такого первого элемента f_m , чье наименьшее значение L принадлежит последовательности \bar{F} . Подпоследовательность Z_a - арифметическая прогрессия последовательности \bar{F} с общим расстоянием $a - r$ (Наблюдение 1), следовательно, поиск значения m сводится к установке рекурсивных параметров:

$$p_{\text{new}} = a, a_{\text{new}} = a - r, u_{\text{new}} = f_1, L_{\text{new}} = L.$$

Возвращаемое значение задачи фактически будет равно $m - 1$, потому что в последовательности \bar{F} одна основная индексация. После того, как m рекурсивно вычислено, $f_m = (f_1 + (m - 1)(a - r)) \bmod a$. Затем вычисляется параметр d , который является ответом на поставленную задачу: $d = (mp - f_0 + f_m) / a$.

Рекурсия не всегда эффективна, т.к. общее расстояние новой прогрессии $-r$, не может быть существенно меньше предыдущей. Используя адаптивные образцы, решается проблема замещения рекурсивного образца для ответа в прогрессии с меньшим общим расстоянием, задействовав оба регистра.

Регистр 1: $a - r \leq a/2$, параметр $a - r$. Задача рекурсивно сведена к новому образцу меньшего размера, который находит значение m последовательности \bar{F} , урегулировав условие:

$$p_{\text{new}} = a, a_{\text{new}} = a - r, u_{\text{new}} = f_1, L_{\text{new}} = L.$$

Регистр 2: $r < a/2$, параметр r . Задача рекурсивно упрощена к предыдущему урегулированию, где:

$$p_{new} = a, a_{new} = a - r, u_{new} = f_1, L_{new} = L$$

3

$$p_{new} = a, a_{new} = r, u_{new} = (a - f_1 + L) \bmod a, L_{new} = L$$

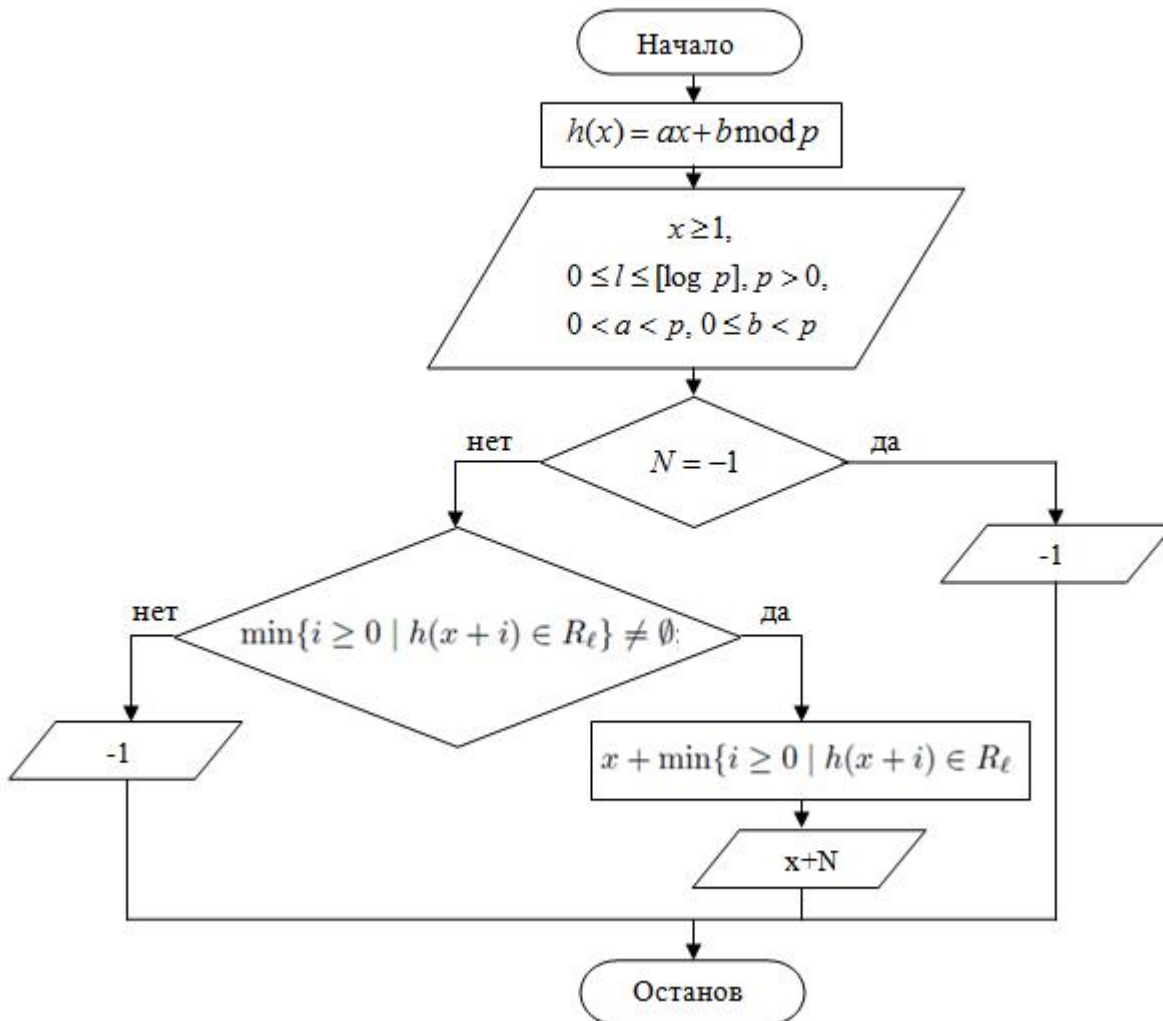


Рис. 2. Алгоритм работы функции DirectSample(x,l,p,a,b)

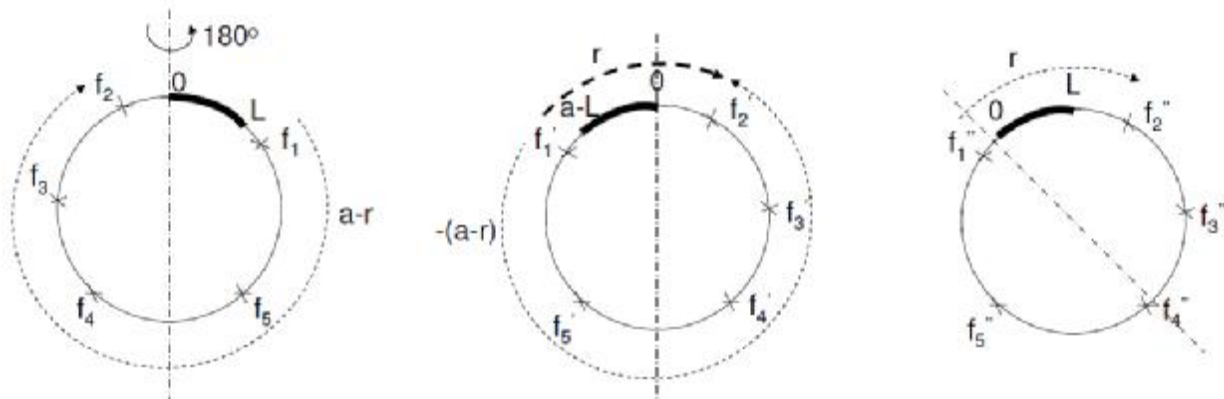


Рис. 3. Отображение типового уровня z_a к последовательности данных:
а) уровень z_a и последовательность \overline{F} ; б) замкнутый уровень z_a и последовательность \overline{F}' ; в) уровень z_a со смещенными координатами \overline{F}''

После добавления некоторых тривиальных условий рекурсии нахождения последующих элементов, механизм работы алгоритма известен и вычис-

ление функции адаптивного образца становится тривиальным.

Теорема 4. Корректность времени и пространственная сложность NextHit.

Условия: NextHit (p, a, u, L) решает Задачу, используя время $O(\log a)$ и часть бит рабочей области $O(\log p \cdot \log a)$. Когда p - простое число, NextHit(p, a, u, L) решает Задачу, используя время $O(\min(\log a, \log d))$ и $O(\log p \cdot \min(\log a, \log d))$, где d - значение, возвращенное NextHit.

Доказательство. Корректность.

Напомним, что функция NextHit(p, a, u, L) должна возвращать $d = \min\{i^3 \mid (u + i) \bmod p \in L\}$, если такое d существует; иначе $d = -1$. Возникают три условия: охватить все возможные случаи, когда алгоритм может вернуться и выйти напрямую. Значение $S[d]$ не переходит в S_0 и $p > a^3 \cdot 2$, так задача поиска d сокращается к задаче поиска m последовательности \overline{F} . Вычисление корректных значений f_1 и r , в качестве подготовительных работ для последующих рекурсивных вызовов, удерживая 0 - основной индекс первой стихии в последовательности \overline{F} , который не больше L . Теоремой 6, доказано, что рекурсивное обращение возвращает один результат. Следовательно -1 возвращается рекурсивным обращением, нет никакой стихийной последовательности \overline{F} , меньше или равной L . Тогда, возвращается значение $d = -1$. Иначе вычисляется и возвращается значение d , используя результаты, возвращенные предшествующим рекурсивным обращением (Теорема 2).

2.1. Временные рамки

Предположим, что дополнения операций умножения и деления занимают единицу времени, в каждом рекурсивном обращении $a_{new} \in a/2$, и факт - в худшем случае рекурсия вернется. Когда $a=1$ глубина рекурсий составляет не более чем $\log a$. Поскольку временной интервал для местного вычисления в каждом рекурсивном обращении постоянен, временной интервал NextHit равен $O(\log a)$.

В частном случае, где p - простое число, которое является регистром при использовании NextHit, значение d возвращенное NextHit никогда не отрицательно. Тогда, длина арифметической прогрессии NextHit работает при $-d+1$.

Поскольку в каждом рекурсивном обращении, находится общее расстояние в новой прогрессии, уменьшенной как минимум наполовину, то длина прогрессии будет работать со следующей рекурсией NextHit. Это наблюдение подразумевает, что глубина рекурсии составляет не более чем $\log d$, тогда полный временной интервал равен $O(\log d)$. Тогда сравнивая с временным интервалом NextHit в общем случае, временной интервал NextHit в этом частном случае равен $O(\min(\log a, \log d))$.

2.2. Память и сложность коммуникации

В каждом рекурсивном обращении, NextHit нужно запомнить постоянный ряд местных переменных как например p, a, u, L , и т.п. С тех пор, как p доминирует над параметрами a, u и L (если $L^3 \leq p$) NextHit() возвращается

без рекурсивных обращений, поскольку каждому рекурсивному обращению нужно пространство стека равное $O(\log p)$. Пока глубина рекурсии есть не более чем $O(\log a)$, пространственная сложность алгоритма NextHit связана временными отрывками $O(\log^2 p)$.

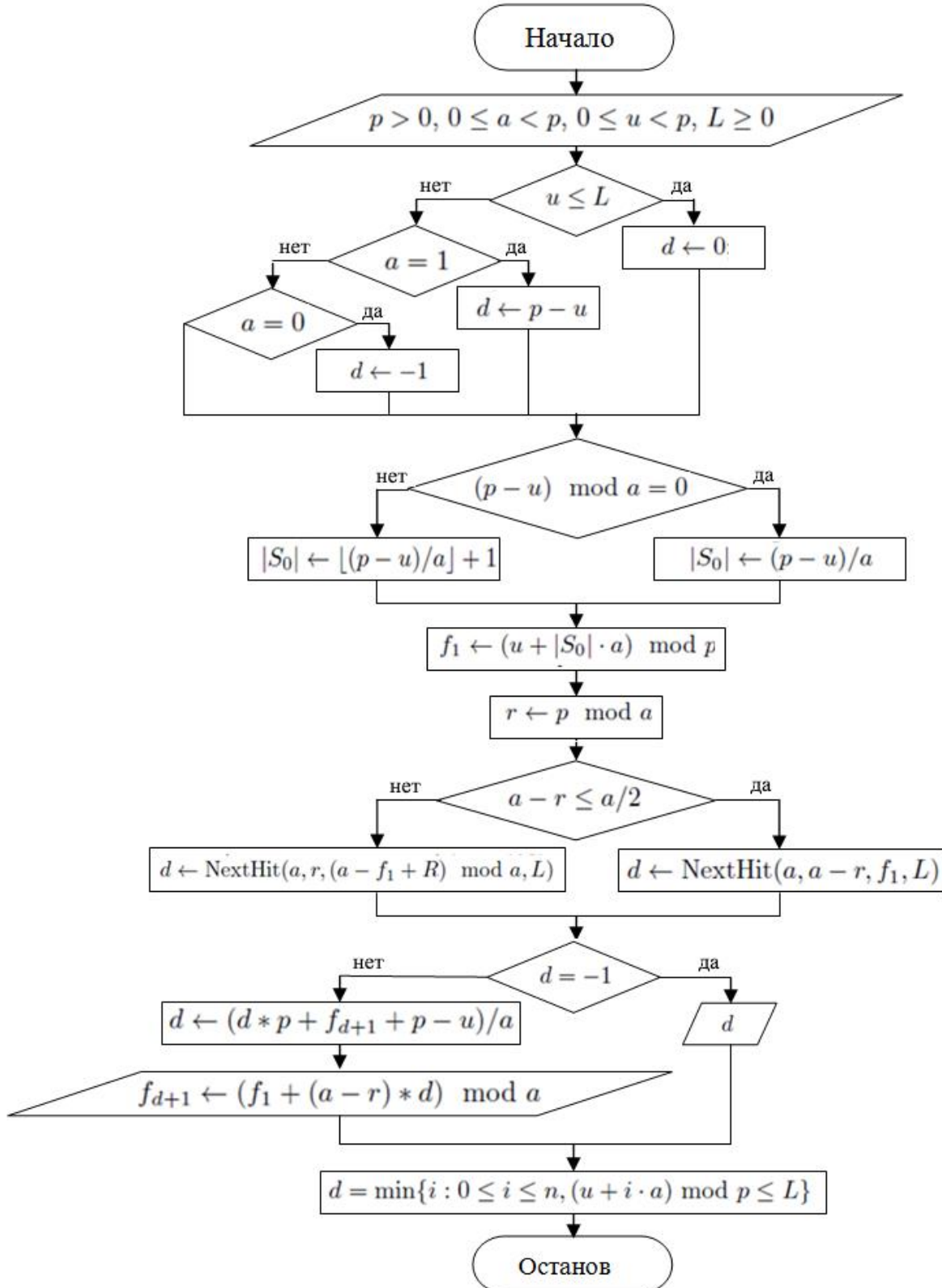


Рис. 4. Алгоритм работы функции поиска

Обобщение 1. Корректность времени работы и пространственная слож-

ность DirectSample.

DirectSample(x, a, l, p, b) находит следующий l -уровень типового расположения. После чего, поток x использует время $O(\min(\log a, \log d))$ и временные отрывки $O(\log n \cdot \min(\log a, \log d))$, где n - верхняя граница потокового размера и $x+d$ - значение, возвращенное DirectSample.

Доказательство.

Время работы и пространственная сложность DirectSample доминирует в подпрограмме NextHit доказанной в Теореме 3, и учитывая, что p - случайное простое число, выбранное из промежутка $[10n, 20n]$, заявление доказано.

3. Применение алгоритма сквозной выборки в параллельных вычислениях

Описано [5] полное представление о методе расчета при объединении нескольких потоков, с доказательством работы программы и анализом временных рамок использования пространственной памяти и коммуникационной сложности.

Формальное описание алгоритма представлено на рис. 1. Один образец алгоритма автоматически не приводит к параметру (e, d) для оценки U , но производит оценку в пределах фактора с постоянной вероятностью e . Стандартная методика сокращения вероятности - возвращение медианы результатов пользователю из образцов от константы к входному параметру d , в подобных случаях занимает $O(\log(1/d))$ времени.

Полная структура алгоритма является координируемым адаптивным осуществлением выборки, но использует хэш-функцию h , и поэтому может использовать сквозную выборку в качестве подпрограммы для более быстрой пробующей процедуры. Беспорядочно выбирается парами независимая хэш-функция h , далее для координируемого осуществления выборки, хэш-функция h разделяет потоковые Процессоры-А -Б и арбитр. Каждый параметр программного узла начинается с пустого образца размера $a = \lceil 60 / e^2 \rceil$ и типового горизонтального уровня $l = 0$.

Алгоритм не проверяет хэш-значение каждого потокового элемента. После обработки потокового элемента алгоритма a_i используется функция DirectSample($i+1, l, p, a, b$), для поиска следующего потокового элемента, который нужно проверить в текущем типовом горизонтальном уровне l . Алгоритм находится в режиме ожидания, пока функция не сработает.

Когда найден элемент, чей индекс расположения вернул DirectSample, он будет выбран образцом, если это часть уровня l . Алгоритму не нужно проверять элементы хэш-значений, так как они гарантировано существуют, чтобы параметр R_1 присутствовал в DirectSample. После того, как элемент потока обработан, обращение к функции дает следующее потоковое расположение, в котором нужно будет проверить потоковый элемент (рис. 5).

Если после вставки нового элемента образец становится избыточным, типовой уровень увеличится на единицу. Все потоковые элементы, которые находятся в настоящий момент в образце, если их хэш-значения принадлежат

R_1 , иначе они будут сброшены.

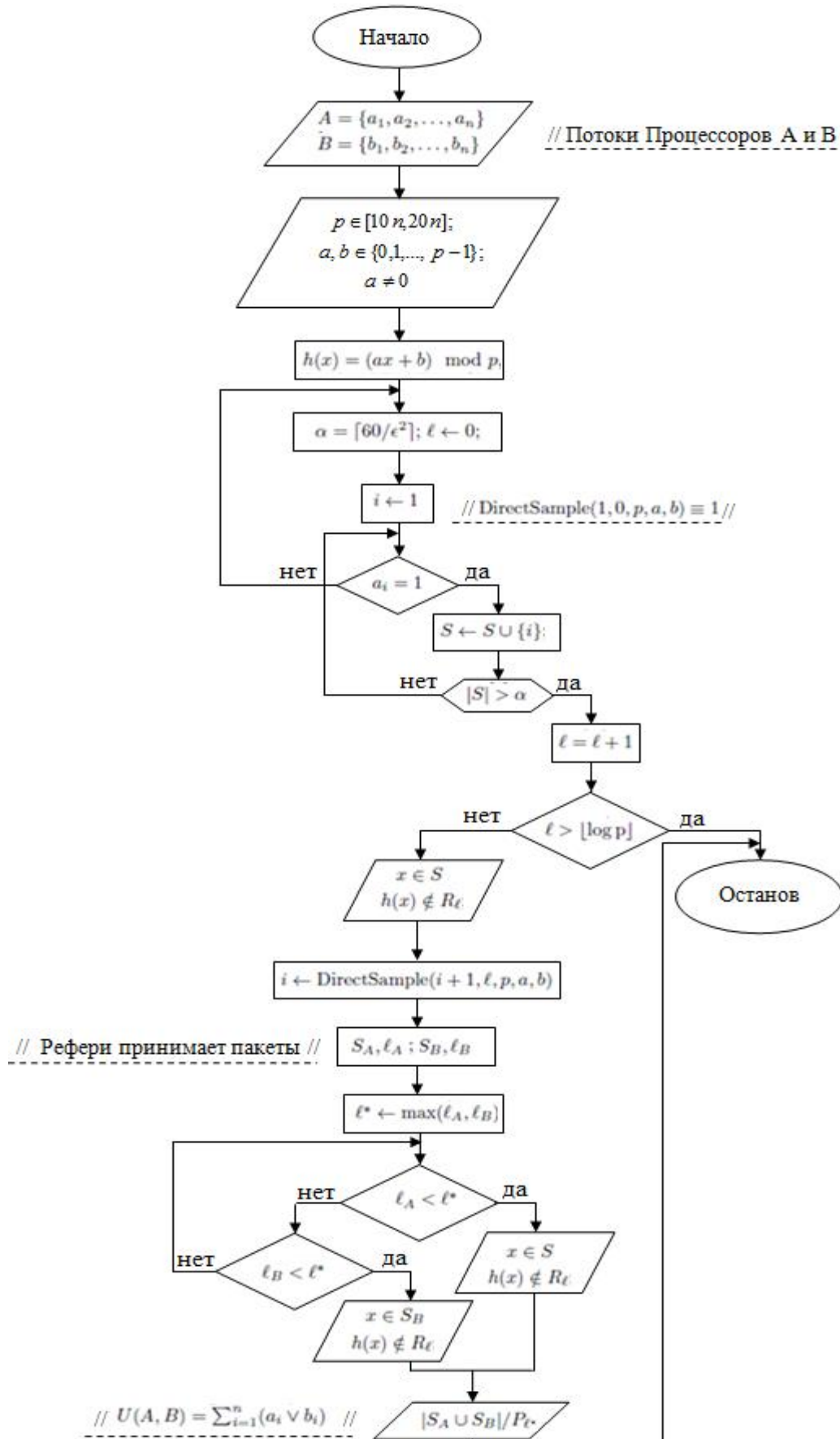


Рис. 5. Процесс отбора образцов из элементов потока

Типовой уровень будет продолжать увеличиваться, пока образец не заполнится. Есть вероятность, при которой типовой уровень может превысить [log p], то предложенный алгоритм следует скорректировать.

Список использованных источников

1. Локтева М.В., Кравец О.Я. Процесс вычисления в системах потоковой передачи данных, использующий метод адаптивной выборки элементов // Современные инструментальные системы, информационные технологии и инновации: сб. науч. тр. XII-ой Международ. НПК (19-20 марта 2015 года); в 4-х т., Т. 2, Курск, 2015. - С. 369-373.
2. Considine J., Li F., Kollios G., Byers J. Approximate aggregation techniques for sensor databases // International Conference on Data Engineering. - P. 449–460, 2004.
3. Babcock B., Datar M., Motwani R., O'Callaghan L. Maintaining variance and k-medians over data stream windows // Proceedings of the ACM Symposium on Principles of Database Systems. - P. 234 – 243, 2003.
4. Lokteva M.V., Kravets O.Ja. Computation in data stream systems// Modern Informationization Problems: Proc. of the XIX-th International Open Science Conference. - Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2014. - P. 172-177.
5. Бурлуцкая М.В. Информационни и алгоритмични модели на паралелни търсения на елементи в разпределена информационна система // Парадигма (Болгария). - 2016. - № 1. - С. 54-58.

Добродеев Д.В., Авсеева О.В.

КОНЦЕПЦИЯ КРОССПЛАТФОРМЕННОГО МОБИЛЬНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ ПО BLUETOOTH LOW ENERGY С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ END-TO-END ШИФРОВАНИЯ

Воронежский государственный университет

Введение

Bluetooth Low Energy (BLE) стал одним из наиболее распространённых протоколов беспроводного взаимодействия в мобильных и IoT-системах. Технология применяется для обмена данными между смартфонами и периферийными устройствами, включая носимую электронику, медицинские датчики и системы автоматизации.

Несмотря на наличие встроенных механизмов безопасности, основанных на алгоритме AES-CCM [1], защита BLE реализуется преимущественно на канальном уровне и не гарантирует безопасности данных в условиях компрометации устройства или приложения.

Современные угрозы требуют реализации дополнительного уровня защиты - end-to-end шифрования на уровне приложения, обеспечивающего конфиденциальность и целостность передаваемых данных независимо от транспортного канала [2].

Целью работы является разработка концепции кроссплатформенного мобильного приложения, реализующего защищённую передачу данных по BLE с использованием end-to-end шифрования.

1. Архитектура приложения

Архитектура приложения включает четыре основных уровня: BLE-слой, криптографический слой, слой прикладной логики и пользовательский интерфейс.

BLE-слой отвечает за низкоуровневое взаимодействие с беспроводным каналом передачи данных на основе Bluetooth Low Energy. Данный уровень реализует поиск устройств, установление соединения, работу с GATT-характеристиками, согласование MTU и передачу данных в виде последовательности байтов. Кроме того, BLE-слой обеспечивает фрагментацию сообщений с учётом ограничений размера пакета и сборку входящих данных. Он не содержит логики обработки данных и не выполняет криптографических операций, выступая исключительно как транспортный механизм.

Криптографический слой реализует функции защиты передаваемой информации и обеспечивает end-to-end шифрование на уровне приложения. В его задачи входит выполнение обмена ключами, генерация сессионных ключей, шифрование и расшифрование сообщений, а также контроль целостности данных. Для обмена ключами используется алгоритм X25519 [5], позволяющий эффективно вычислять общий секрет между устройствами. Полученный секрет обрабатывается с помощью функции HKDF [6] для формирования сессионного ключа. Передача данных осуществляется с использованием аутентифицированного шифрования ChaCha20-Poly1305 [4], что обеспечивает одновременно конфиденциальность и целостность сообщений. Дополнительно реализуется управление попсе и защита от повторной передачи сообщений.

Слой приложения содержит бизнес-логику и координирует взаимодействие между пользовательским интерфейсом, криптографическим и BLE слоями. На данном уровне формируются сообщения для передачи, осуществляется их сериализация, обработка входящих данных и управление состоянием соединения. Слой приложения не зависит от конкретной реализации транспортного уровня и криптографии, что обеспечивает гибкость архитектуры и возможность модификации отдельных компонентов без изменения остальной системы.

Пользовательский интерфейс используется для отображения состояния соединения, обработки действий пользователя и передачи команд в прикладной слой. Он реализует визуальные компоненты, обработку пользовательских действий и передачу команд в слой приложения. UI-слой не взаимодействует напрямую с BLE или криптографическими механизмами, что снижает связанность системы и упрощает сопровождение и тестирование.

Схематично описанная архитектура представлена на рис. 1.

Передача пользовательских данных реализуется по следующей цепочке: UI-слой формирует пользовательское действие, которое передаётся в слой приложения. Слой приложения преобразует данные в формат, пригодный для передачи, после чего передаёт их в криптографический слой. На данном этапе выполняется шифрование, добавление попсе и формирование аутентификационного тега. Полученные зашифрованные данные передаются в BLE-слой, который осуществляет их фрагментацию и отправку по беспроводному каналу.

Приём данных осуществляется в обратном порядке. BLE-слой принимает фрагменты, выполняет их сборку и передаёт результат в криптографиче-

ский слой. После успешной проверки целостности и расшифрования данные поступают в слой приложения, где обрабатываются в соответствии с бизнес-логикой и передаются в UI-слой для отображения.

Важно отметить, что прямое взаимодействие слоя приложения с BLE слоем допускается только для служебных операций, не связанных с передачей пользовательских данных, таких как поиск устройств, установление и разрыв соединения. Все данные, требующие защиты, в обязательном порядке проходят через криптографический слой.

Разделение системы на независимые уровни упрощает модификацию отдельных компонентов. Например, при необходимости можно заменить используемый криптографический алгоритм или адаптировать приложение под другой транспортный канал без существенного изменения остальной архитектуры.

Разделение логики по слоям также упрощает тестирование отдельных компонентов системы с использованием mock-объектов. Каждый слой может быть протестирован изолированно с использованием mock-объектов, что упрощает разработку и повышает надёжность программного обеспечения.

2. Протокол взаимодействия устройств

В рамках предложенной архитектуры для обеспечения защищённой передачи данных реализуется прикладной протокол взаимодействия устройств, работающий поверх Bluetooth Low Energy. Данный протокол определяет порядок обнаружения устройства, установления соединения, обмена ключами, формирования сессионного ключа и передачи зашифрованных сообщений.

Процесс взаимодействия начинается с этапа обнаружения устройства. Иницилирующее устройство выполняет сканирование BLE-окружения и получает advertising-пакеты от доступных периферийных устройств. После выбора нужного устройства устанавливается соединение на уровне GATT. На данном этапе BLE используется только как транспортный канал, а пользовательские данные ещё не передаются.

После установления соединения начинается этап обмена ключами. Каждое устройство генерирует собственную пару ключей и передаёт другой стороне открытый ключ. Получив открытый ключ второго устройства, обе стороны независимо вычисляют общий секрет с использованием алгоритма X25519. Важно, что общий секрет не передаётся по каналу связи, а формируется локально на каждом устройстве.

Полученный общий секрет не используется напрямую для шифрования данных. На его основе с помощью функции HKDF [6] формируется сессионный ключ. Такой подход позволяет получить криптографически стойкий ключевой материал и отделить этап обмена ключами от этапа непосредственного шифрования пользовательских сообщений.

После завершения обмена ключами считается, что между устройствами установлен защищённый канал. Все последующие пользовательские данные передаются только в зашифрованном виде. Для этого слой приложения формирует сообщение, передаёт его в криптографический слой, где выполняется шифрование, добавление nonce и формирование аутентификационного тега.

Затем зашифрованные данные передаются в BLE-слой, который выполняет фрагментацию сообщения и отправляет его по беспроводному каналу.

На стороне получателя процесс выполняется в обратном порядке. BLE-слой принимает фрагменты, собирает их в исходное сообщение и передаёт его в криптографический слой. Криптографический слой проверяет аутентификационный тег, контролирует уникальность nonce и выполняет расшифрование данных. Если проверка проходит успешно, сообщение передаётся в слой приложения для дальнейшей обработки. После успешного получения может быть отправлено сообщение типа ACK, подтверждающее доставку.

Если при обработке сообщения возникает ошибка, например нарушение целостности данных, повторное использование nonce, невозможность расшифрования или нарушение ожидаемой последовательности пакетов, получатель формирует сообщение об ошибке. Такое сообщение позволяет уведомить отправителя о сбое и при необходимости инициировать повторную передачу данных или разрыв соединения. Более наглядно процесс взаимодействия представлен на рис. 2.

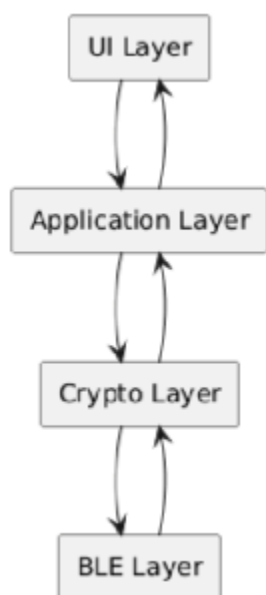


Рис. 1. Диаграмма архитектуры приложения по слоям

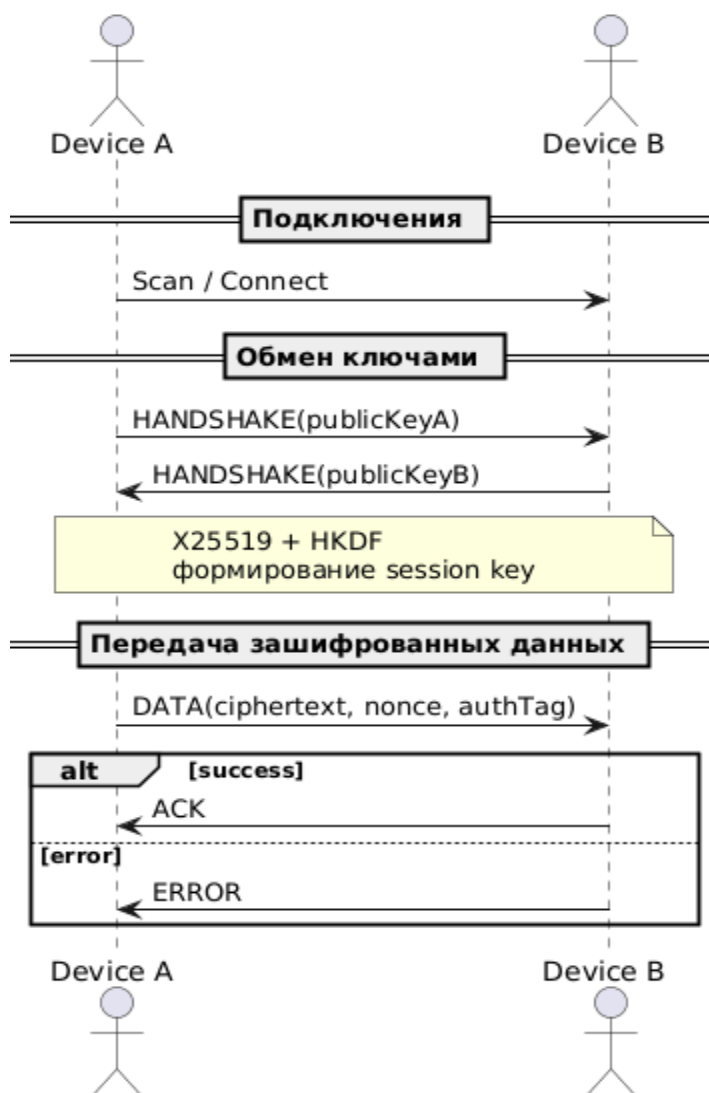


Рис. 2. UML-диаграмма процесса взаимодействия устройств при передаче данных

2.1. Формат сообщений

Передаваемые сообщения имеют фиксированную логическую структуру, включающую заголовок, служебные поля и полезную нагрузку. Общий формат сообщения представлен на рис. 3.

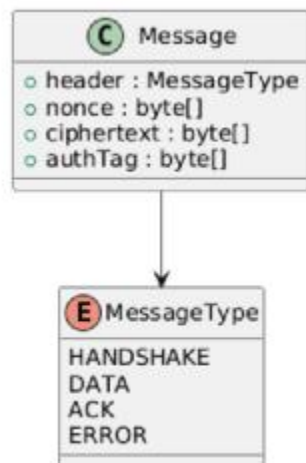


Рис. 3. Формат передаваемого сообщения

Сообщение включает заголовок, определяющий тип передаваемых данных, уникальное значение nonce, обеспечивающее защиту от повторной передачи, зашифрованную полезную нагрузку и аутентификационный тег. Такая структура позволяет обеспечить конфиденциальность, целостность и аутентичность передаваемой информации.

Для организации взаимодействия между устройствами в рамках разработанного протокола используется классификация сообщений по их назначению. Каждое передаваемое сообщение содержит поле заголовка, определяющее его тип. Это позволяет корректно интерпретировать полученные данные и реализовать различные этапы протокола. Все типы сообщений описаны в табл. 1.

Таблица 1

Типы сообщений

Тип сообщения	Назначение
Handshake	Обмен ключами
Data	Передача данных
Acknowledge	Подтверждение
Error	Обработка ошибок

2.2 Особенности передачи по BLE

В связи с ограничениями BLE на размер передаваемых данных реализуется механизм фрагментации сообщений. При превышении допустимого размера сообщение разбивается на несколько фрагментов, каждый из которых передаётся отдельно.

На стороне получателя осуществляется сборка фрагментов в исходное сообщение, после чего выполняется его расшифрование. Для корректной сборки используется нумерация пакетов и контроль их последовательности.

Дополнительно учитываются особенности BLE, такие как нестабильность соединения и возможные потери пакетов. В связи с этим протокол предусматривает повторную передачу данных при возникновении ошибок.

3. Модель угроз и безопасность

При разработке системы защищённой передачи данных по Bluetooth Low Energy необходимо учитывать потенциальные угрозы, возникающие при работе в беспроводной среде. В отличие от проводных каналов связи, BLE подвержен перехвату трафика и несанкционированному доступу, что требует

дополнительного уровня защиты на уровне приложения [2].

При передаче данных по Bluetooth Low Energy необходимо учитывать угрозы, характерные для беспроводных каналов связи. В зоне действия BLE возможен перехват передаваемых пакетов, их модификация или повторная отправка. Кроме того, атакующий может осуществлять как пассивный анализ трафика, так и активное вмешательство в процесс взаимодействия устройств.

К числу основных угроз относятся:

- Перехват BLE-трафика с использованием специализированных BLE-sniffer-устройств или стандартных средств анализа радиоканала;
- Атака типа «человек посередине» (MITM), при которой осуществляется подмена сообщений в процессе обмена ключами;
- Повторная передача ранее перехваченных пакетов (replay attack), способная нарушить корректность работы приложения;
- Компрометация одного из устройств взаимодействия, в результате которой возможен доступ к передаваемым данным и ключевому материалу.

Встроенные механизмы безопасности BLE, основанные на использовании алгоритма AES-CCM, обеспечивают защиту на уровне канала передачи, однако не гарантируют защиту данных в случае компрометации устройства или атак на уровне приложения. Кроме того, данные механизмы не всегда эффективно предотвращают MITM-атаки, особенно при использовании небезопасных режимов сопряжения.

Для противодействия указанным угрозам в предлагаемой архитектуре используется end-to-end шифрование, реализованное на уровне приложения. Для снижения риска перечисленных атак в архитектуре используются следующие механизмы защиты:

1. Шифрование данных с использованием алгоритма ChaCha20-Poly1305, обеспечивающего конфиденциальность и контроль целостности сообщений;
2. Обмен ключами с использованием протокола на основе алгоритма X25519, позволяющего безопасно формировать общий секрет между устройствами;
3. Генерацию сессионных ключей с помощью HKDF, что исключает прямое использование общего секрета;
4. Использование уникального nonce для каждого сообщения, предотвращающего атаки повторной передачи;
5. Проверку аутентификационного тега, обеспечивающую обнаружение модификации данных.

Применение end-to-end шифрования позволяет обеспечить защиту данных независимо от транспортного уровня. Даже в случае перехвата BLE-трафика злоумышленник не сможет получить доступ к содержимому сообщений без знания криптографических ключей.

Нужно учитывать, что предложенный подход полностью не устраняет риски, связанные с компрометацией конечного устройства, однако значительно снижает вероятность успешной реализации атак на уровне передачи

данных.

Заключение

В ходе работы была предложена концепция кроссплатформенного мобильного приложения для защищённой передачи данных по Bluetooth Low Energy с использованием end-to-end шифрования. Рассмотренная архитектура разделяет систему на независимые уровни, отвечающие за пользовательский интерфейс, прикладную логику, криптографическую обработку и взаимодействие с BLE. Такой подход упрощает сопровождение приложения и позволяет изменять отдельные компоненты без существенной переработки всей системы.

Для организации защищённого взаимодействия между устройствами был описан прикладной протокол, включающий установление BLE-соединения, обмен ключами и передачу зашифрованных сообщений. В качестве основы для формирования защищённого канала используются алгоритмы X25519 и HKDF, а защита пользовательских данных реализуется с помощью ChaCha20-Poly1305.

Отдельное внимание было уделено особенностям BLE как транспортной среды. Особенно это заметно при использовании малого значения MTU, когда передача одного сообщения требует отправки нескольких BLE-пакетов.

Также были рассмотрены основные угрозы, возникающие при передаче данных по беспроводному каналу, включая перехват трафика, MITM-атаки и повторную отправку сообщений. Даже при перехвате BLE-трафика содержимое сообщений остаётся недоступным без знания сессионного ключа.

Рассмотренная архитектура может использоваться при разработке мобильных приложений, взаимодействующих с BLE-устройствами в IoT-системах, носимой электронике и устройствах автоматизации. При этом реализация дополнительного криптографического уровня не требует изменения встроенных механизмов Bluetooth Low Energy и может быть адаптирована под различные сценарии взаимодействия устройств.

Список использованных источников

1. <https://www.bluetooth.com/specifications/bluetooth-core-specification/>.
2. Guide to Bluetooth Security (SP 800-121 Rev. 2) / National Institute of Standards and Technology. - Gaithersburg, MD, 2017. - 68 p.
3. Recommendation for Key Derivation Using Pseudorandom Functions (SP 800-56C Rev. 2) / National Institute of Standards and Technology. - Gaithersburg, MD, 2020. - 42 p.
4. Nir Y., Langley A. ChaCha20 and Poly1305 for IETF Protocols: RFC 8439. - 2018. - <https://datatracker.ietf.org/doc/html/rfc8439>.
5. Langley A., Hamburg M., Turner S. Elliptic Curves for Security : RFC 7748. - 2016. - <https://datatracker.ietf.org/doc/html/rfc7748>.
6. Krawczyk H., Eronen P. HMAC-based Extract-and-Expand Key Derivation Function (HKDF): RFC 5869. - 2010. - <https://datatracker.ietf.org/doc/html/rfc5869>.

Талагаев М.Ю., Недикова Т.Н., Сергеев М.Ю.
АВТОМАТИЗАЦИЯ УСТРАНЕНИЯ УЯЗВИМОСТЕЙ В ЦЕПОЧКЕ
ПОСТАВОК ПРИЛОЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ GITOPS-
ПОДХОДА

Воронежский государственный технический университет

Введение. Современная разработка приложений характеризуется использованием большого количества сторонних зависимостей. В предыдущих работах авторов была рассмотрена методология DevSecOps, направленная на выявление уязвимостей безопасности на этапах сборки и развертывания приложений. Однако, несмотря на эффективность обнаружения угроз, процесс непосредственного устранения уязвимостей требует ручного вмешательства [1].

Целью статьи является исследование и демонстрация практического подхода к полной автоматизации цикла устранения уязвимостей в приложениях на базе React и Next.js за счет применения принципов GitOps. В работе рассматривается архитектура, при которой агент GitOps-оператора (Flux CD) выступает инициатором автоматического обновления конфигурации при обнаружении исправленного образа приложения в Container Registry. Особое внимание уделяется проблеме сокращения временного окна уязвимости (периода между публикацией информации об уязвимости (например, CVE-2025-55182 в React Server Components) и фактическим развертыванием обновленной версии приложения в продуктивной среде.

Ключевые проблемы ручного реагирования на инциденты безопасности в CI/CD

При интеграции сканеров безопасности в классические CI/CD пайплайны достигается важная цель - сдвиг проверок безопасности «влево», то есть на более ранние этапы жизненного цикла разработки [1]. Типовой пайплайн, описанный в современных практиках DevSecOps, включает этапы статического анализа кода, проверки зависимостей и сканирования финального артефакта [2].

Однако блокировка пайплайна является лишь сигналом о наличии проблемы, но не ее решением. Таким образом, возникает необходимость в создании механизма, который не только выявляет уязвимость, но и инициирует процесс ее исправления в кодовой базе и конфигурации окружения в автоматическом режиме [3].

Сравнительный анализ подходов к устранению уязвимостей

Для объективной оценки эффективности внедрения GitOps-методологии в процессы управления безопасностью необходимо провести сравнительный анализ существующих практик реагирования на инциденты, связанные с уязвимостями в зависимостях и контейнерных образах [4]. В рамках данной проблемы рассматриваются три основных подхода, различающихся степенью автоматизации и ролью человека в цикле устранения угрозы: классический ручной подход, полуавтоматическое обновление зависимостей с использованием ботов, например, Dependabot и полностью автоматизированный GitOps-

конвейер на базе оператора Flux CD.

Классический ручной подход (Manual Remediation Workflow)

Наиболее распространенной практикой в командах, использующих системы непрерывной интеграции и доставки (CI/CD) без глубокой интеграции средств автоматического обновления конфигураций, является ручное реагирование на сигналы от инструментов сканирования безопасности. Обобщенная схема ручного устранения уязвимостей приведена на рис. 1.

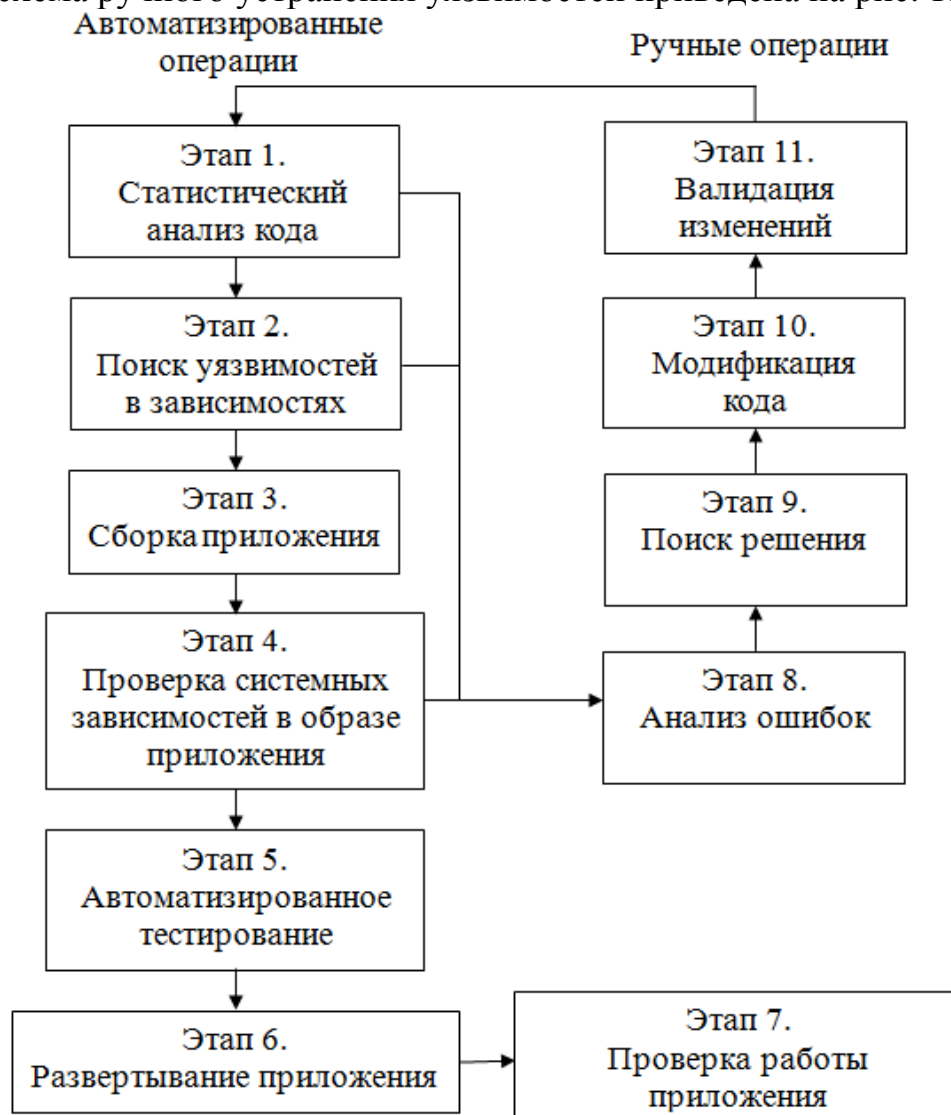


Рис. 1. Схема ручного устранения уязвимости в классическом виде системы CI/CD

После того как сборка прерывается инструментом анализа, разработчик получает уведомление о неудачном выполнении задачи и затем выполняются этапы 8, 9, 10 и 11. На этапе 8 происходит анализ логов упавшего задания и поиск конкретной причины случившегося. Далее на этапе 9, разработчик обращается к базе данных уязвимостей для определения минимальной безопасной версии библиотеки. Этап 10 включает в себя ручное редактирование файлов манифеста зависимостей в локальной ветке разработки. На этапе 11 происходит создание запроса на обновление исправлений, отправка его в удаленный репозиторий и ожидание повторного прохождения всех этапов

CI/CD [2].

Основным недостатком данного подхода является значительная временная задержка, которая напрямую зависит от доступности и загруженности разработчика. В условиях распределенной разработки и наличия большого количества микросервисов ручное обновление каждой уязвимой зависимости становится трудозатратным и рутинным процессом, отвлекающим ресурсы от разработки новой функциональности.

Полуавтоматический подход с использованием Dependabot.

Следующим эволюционным шагом в решении проблемы ручного обновления является внедрение автоматизированных агентов, интегрированных непосредственно в платформы управления исходным кодом. Наиболее ярким представителем данного класса инструментов является Dependabot, встроенный в GitHub, а также его аналоги для других экосистем.

Принцип работы Dependabot основан на периодическом сканировании файлов зависимостей в репозитории и сопоставлении версий используемых пакетов с базой известных уязвимостей [4]. При обнаружении небезопасной версии Dependabot автоматически генерирует Pull Request, содержащий необходимые изменения для обновления уязвимой зависимости до безопасной версии. Пример такого автоматического Pull Request представлен на рис. 2.

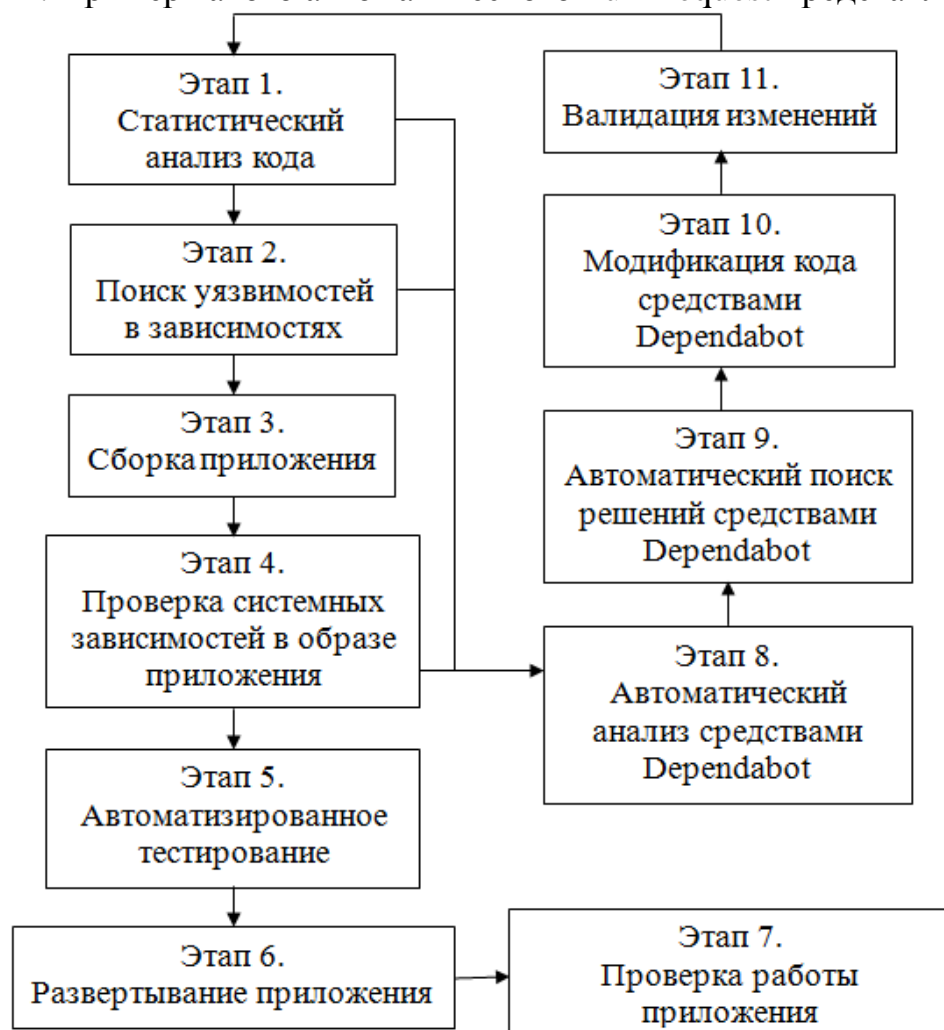


Рис. 2. Автоматически созданный пакет Pull Request с обновлением уязвимой зависимости

Данный подход существенно сокращает время, затрачиваемое на этапы «Идентификация» и «Поиск решения», однако сохраняет ключевую зависимость от человеческого фактора на этапе принятия решения (этап 11). Для того чтобы исправление попало в основную ветку разработки разработчик должен вручную просмотреть созданный Pull Request, убедиться в корректности предложенных изменений и нажать кнопку «Merge».

Несмотря на значительное упрощение процесса, полуавтоматический подход полностью не решает проблему задержки разработки. Время слияния Pull Request зависит от рабочих процессов команды, наличия обязательных проверок изменений и загруженности разработчиков. Кроме того, Dependabot ориентирован исключительно на обновление библиотек уровня и не управляет обновлением контейнерных образов или конфигураций инфраструктуры, что ограничивает его применимость в комплексных DevSecOps-конвейерах.

Полностью автоматизированный GitOps-подход (Pull-based Automation)

Качественным отличием GitOps-методологии от описанных выше подходов является переход от push-модели доставки изменений (когда CI/CD-система «проталкивает» артефакт в среду) к pull-модели, реализуемой специализированным оператором, работающим внутри целевого кластера (например, Kubernetes). В контексте устранения уязвимостей данная модель позволяет замкнуть цикл обратной связи полностью автоматически, исключив необходимость ручного создания и слияния Pull Request'ов. В основе предлагаемого решения лежит использование компонента Flux Image Automation Controller, который является частью экосистемы Flux CD. Контроллер непрерывно опрашивает заданный Container Registry на предмет появления новых тегов образов [5].

На рис. 3 представлена обобщённая схема потоков данных и управляющих воздействий в предлагаемой архитектуре. Система состоит из двух основных контуров: контура разработки и сборки (левая часть схемы) и контура развёртывания и синхронизации (правая часть схемы).

Контур сборки инициируется разработчиком при внесении изменений в репозиторий исходного кода приложения.

CI/CD-система выполняет последовательность шагов:

- статический анализ кода;
- сканирование зависимостей;
- сборку Docker-образа;
- сканирование Docker-образа на наличие уязвимостей и публикацию в Container Registry.

Важно отметить, что публикация образа в реестр производится только при условии успешного прохождения всех проверок безопасности, что гарантирует отсутствие известных критических уязвимостей в опубликованном артефакте.

Взаимодействие между контурами осуществляется через Container Registry и Git-репозиторий конфигурации. При появлении в реестре нового образа, удовлетворяющего заданной политике обновления, Image Automation

Controller создаёт запрос на обновления кода с изменением тега образа в Config Repository. Последующая синхронизация, инициируемая Source Controller, приводит к развёртыванию новой версии приложения в кластере.



Рис. 3. Полностью автоматизированный процесс по средствам GitOps методологии

Сравнительные характеристики трех рассмотренных подходов по ключевым критериям эффективности представлены в табл. 1.

Как видно из табл. 1, внедрение GitOps-автоматизации позволяет радикально сократить ключевой показатель Mean Time to Remediate (MTTR), что имеет критическое значение при массовой эксплуатации уязвимостей, аналогичных CVE-2025-55182 в серверных компонентах React [4].

Таблица 1

Сравнение подходов к устранению уязвимостей

Критерий / Подход	Ручное устранение	Dependabot (Полуавтомат)	GitOps Automation
Время реакции	Часы / Дни	Минуты (до создания PR) + Время ревью	Менее 5-10 минут
Участие человека	Участвует в течение всего цикла	Подтверждение Merge Request	Не требуется
Охват артефактов	Код / Образы	Только файлы зависимостей (пакеты)	Образы контейнеров и конфигурации
Аудируемость	История коммитов разработчика	Только файлы зависимостей (пакеты)	Образы контейнеров и конфигурации
Риск изменения конфигурации	Высокий	Средний	Низкий (постоянная сверка с Git)

Реализация предлагаемого решения на основе GitOps-автоматизации

Flux CD устанавливается в кластер Kubernetes и настраивается на отслеживание Config Repository.

Для реализации автоматического обновления образов используются следующие пользовательские ресурсы Flux [5]:

- Image Repository
- Image Policy
- ImageUpdateAutomation

Пример манифестов для GitOps-автоматизации приведен ниже и реализуется в несколько этапов.

Этап 1. В первую очередь необходимо создать ресурс fluxed, который будет отслеживать репозиторий с новыми образами приложения (Image Repository). Пример такого манифеста для системы Kubernetes представлен на рис. 4.

```
apiVersion: image.toolkit.fluxcd.io/v1beta2
kind: ImageRepository
metadata:
  name: nextjs-app
  namespace: flux-system
spec:
  image: registry.gitlab.com/mygroup/nextjs-app
  interval: 1m
  secretRef:
    name: registry-credentials
```

Рис. 4. Манифест Image Repository для доступа к образам приложения

Этап 2. Следующим этапом является создание политики обновления приложения. Требуется задать правила для тегов, которые должны быть автоматически развернуты в контуре.

Пример манифеста, реализованного на втором этапе, представлен на рис. 5.

```
apiVersion: image.toolkit.fluxcd.io/v1beta2
kind: ImagePolicy
metadata:
  name: nextjs-app
  namespace: flux-system
spec:
  imageRepositoryRef:
    name: nextjs-app
  policy:
    server:
      range: '>=1.0.0'
  filterTags:
    pattern: '^main-[a-f0-9]+$'
    extract: '$tag'
```

Рис. 5. Манифест Image Policy для доступа к образам приложения

Этап 3. Автоматическое обновление приложений. Пример реализации манифеста ImageUpdateAutomation приведен на рис. 6.

```
apiVersion: image.toolkit.fluxcd.io/v1beta2
kind: ImageUpdateAutomation
metadata:
  name: nextjs-app
  namespace: flux-system
spec:
  interval: 1m
  sourceRef:
    kind: GitRepository
    name: flux-system
  git:
    checkout:
      ref:
        branch: main
    commit:
      author:
        email: flux-bot@cluster.local
        name: Flux Automation
      messageTemplate: |
        [ci] Автообновление образа {{.Image.Name}} до {{.Image.Tag}}
  update:
    path: ./apps/nextjs
    strategy: Setters
```

Рис. 6. Манифест для обновления приложений

Предложенная архитектура формирует полностью автоматизированный замкнутый цикл устранения уязвимостей. После обновления уязвимой зависимости в исходном коде конвейер CI/CD выполняет сборку и сканирование нового контейнерного образа, публикуя его в реестр исключительно при успешном прохождении всех проверок безопасности.

Далее инициатива переходит к GitOps-оператору Flux: контроллер авто-

матизации образов обнаруживает появление артефакта, самостоятельно модифицирует манифесты в репозитории конфигурации, создаёт соответствующий коммит от имени сервисной учётной записи и инициирует синхронизацию кластера.

Весь процесс - от фиксации исправления до его развёртывания в продуктивной среде - выполняется без участия человека, при этом полная история изменений инфраструктуры сохраняется в Git, обеспечивая прозрачность.

Заключение

Внедрение GitOps-подхода в процесс устранения уязвимостей приложений позволяет сформировать полностью автоматизированный конвейер, исключая человеческий фактор из цикла развёртывания критических исправлений.

Предложенная архитектура, объединяющая средства DevSecOps-верификации артефактов с механизмами Flux Image Automation, обеспечивает сокращение времени реакции на угрозы до нескольких минут. При этом вся история изменений конфигурации инфраструктуры фиксируется в Git-репозитории, гарантируя полную аудируемость и возможность отката.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на интеграцию автоматического обновления образов с практиками периодических развёртываний и автоматизированным нагрузочным тестированием для дополнительно повышения надёжности доставки исправлений.

Список использованных источников

1. Талагаев М.Ю., Недикова Т.Н., Аралов М.Н. Методика применения DevSecOps подхода для повышения безопасности веб-приложений// Управление программным инжинирингом: тр. открытой Междунар. НПК. - Воронеж: ВГТУ, 2026. - С. 9-16.
2. Уилсон К.Г. Continuous Delivery. - СПб.: Питер, 2024. - 400 с.
3. Баланов А.Н. DevOps: интеграция и автоматизация. - М.: Лань, 2024. - 240 с.
4. GitOps Cookbook: автоматизация Kubernetes на практике/ Н. Васта, А.С. Буэно. - СПб: Питер, 2023. - 375 с.
5. Блок Э., Эрнандес К. Argo CD. Быстрый старт. - СПб: Питер, 2026. - 272 с.

**Издательство "Научная книга",
Липецкий государственный технический университет,
Бакинский государственный университет**

сообщают о требованиях к статьям, представляемым в международный научно-технический журнал "Информационные технологии моделирования и управления".

Языки: русский; английский.

Основные направления: телекоммуникации в образовании; анализ и синтез сложных систем; моделирование сложных систем и технологических процессов; информационные технологии в экономике; телекоммуникационные системы и приложения; информатизация в юриспруденции; информационные технологии в медицине; автоматическое и автоматизированное проектирование энергетических, электромеханических и технологических систем; информационные системы и их приложения.

Даты. Международный научно-технический журнал "Информационные технологии моделирования и управления" издается не реже 4 раз в год.

Требования к материалам

Материалы предоставляются по электронной почте itmu@bk.ru в присоединенном файле-архиве (WinRar, WinZip).

Материалы должны содержать инициалы и фамилии авторов, название (большими буквами), название организации, представляющей статью, E-Mail. Размер статьи должен находиться в пределах от 8 до 14 страниц стандартного машинописного текста (при размере шрифта 14 pt, шрифт Times New Roman, страница А4, поля 25 мм всюду, одинарный межстрочный интервал). Текст должен быть набран в формате WORD.

Рисунки должны содержаться в отдельных графических файлах (bmp, jpg, gif, tif, wmf). Рисунки включаются в текст статьи "не поверх текста", "не хранить в документе". Размер шрифта в рисунках – не менее 12 pt. Список использованных источников обязателен.

В архиве с материалами в отдельном файле должны содержаться:

- сведения об авторах (фамилия, имя, отчество, место работы и должность, ученая степень, звание, почтовый - с индексом - и электронный адрес);
- указание на количество заказываемых экземпляров (минимальное количество экземпляров, заказываемых авторами - не менее половины их количества с округлением в большую сторону);
- обязательство оплаты оргвзноса - ориентировочно около 230 (350 - вне России) рублей (при оплате за наличный расчет) за одну страницу статьи в одном экземпляре журнала вместе со стоимостью пересылки в ценах мая 2025 г.). Например, оргвзнос от физлица за один экземпляр журнала, включающего авторскую статью объемом 8 страниц, составит 2800 руб. для России и 2320 руб. для авторов из-за рубежа.

Цена одной страницы при оплате организацией - 400 руб., не включая НДС. В этом случае количество экземпляров совпадает с количеством авторов.

Подписка на полугодие осуществляется во всех отделениях связи. Цена централизованной подписки ниже, чем редакционной. Подписной индекс в Объединенном каталоге "Пресса России" (том 1) - 42297.
